

9-10 классы

Внимание! При вычислениях считать **ускорение свободного падения** $g = 10 \text{ м/с}^2$,
универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Каждое задание оценивается в 20 баллов.

1. С борта яхты, движущейся с постоянной скоростью против течения, выпала за борт дорогая дамская сумочка одной из туристок. Через 1 минуту после этого капитан отправил матроса на водном мотоцикле вдогонку за сумочкой. Во сколько раз скорость водного мотоцикла больше скорости яхты, если с момента выхода мотоцикла до его возвращения с потерянной сумочкой прошло 4 минуты?

{=1,5}

2. Материальная точка движется на плоскости под действием силы \vec{F} так, что проекции ее импульса (P_x, P_y) на оси ортогональной системы координат OXY меняются со временем t по закону

$$\begin{cases} P_x = 2 - 6t \\ P_y = 8t \end{cases}$$

В момент времени $t = 1 \text{ с}$ величина ускорения \vec{a} материальной точки равна $10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. В момент времени $t = 2 \text{ с}$ сила перестает действовать и тело продолжает двигаться по инерции. Найдите величину скорости в момент времени $t = 5 \text{ с}$. Все значения даны в единицах СИ. При необходимости округлите ответ до сотых.

{=18,87}

3. С воздушного шара, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой

поверхности объектами: A , B и C . При этом все три угла, под которыми видны с воздушного шара три отрезка AB , BC и AC , – прямые. Расстояние между объектами B и C равно 60 м, а расстояние между A и C равно 100 м. Найдите все значения (в метрах), которые может принимать расстояние между объектами A и B . В ответе укажите сумму всех таких целых значений.

{= 3546}

4. Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1 . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2 . В результате этого подъемная сила воздушного шара изменилась вдвое. Найдите отношение массы оболочки к массе воздуха в объеме оболочки, если плотность более легкого газа ρ_1 относится к плотности воздуха ρ_0 как $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{4}$. Температуру и давление газов считать постоянными.

{=0,25}

5. В саванне в самое жаркое время все животные стремятся на водопой к маленькому озерку. Антилопу около этого озера будет подстерегать опасность, если в это время на водопой придет Лев. Предположим, что в ближайшие 6 минут в произвольный момент времени на этом 6-минутном промежутке у озера появятся и Антилопа, и Лев. Известно, что Антилопа пьет воду в течение полутора минут, а Лев – в течении двух с половиной минут. Какова вероятность того, что Антилопа не встретит льва?

{0,45}

Решения

1. Рассмотрим движение всех тел в системе координат, связанной с водой. Пусть скорость яхты равна V . Тогда скорость водного мотоцикла равна kV , где k – искомая величина. В момент старта мотоцикла расстояние до сумочки равно Vt_1 ($t_1 = 1$). Из условия задачи следует, что выполняется равенство $2Vt_1 + Vt_2 = kVt_2$ ($t_2 = 4$). Отсюда $k = 1,5$.

2. Из второго закона Ньютона в импульсной форме $\bar{F} = \Delta\bar{P}/\Delta t$ следует, что $F_x = \dot{P}_x$; $F_y = \dot{P}_y \Rightarrow F_x = -6$; $F_y = 8$. Тогда величина силы равна $|\bar{F}| = 10$ Н и не меняется со временем. Значит масса материальной точки равна $m = |\bar{F}|/|\bar{a}| = 1$ кг. Таким образом, скорость материальной точки меняется по закону $V_x = \frac{P_x}{m} = 2 - 6t$; $V_y = \frac{P_y}{m} = 8t$ и в момент времени $t = 2$ с величина скорости достигнет величины

$$|\bar{V}| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{(-10)^2 + 16^2} = \sqrt{356} = 18,87 \text{ м/с}.$$

Далее скорость не меняется.

3. Если обозначить стороны треугольника ABC через x, y, z , а расстояния от объектов до аэростата через a, b, c , то: $a^2 + b^2 = x^2$, $b^2 + c^2 = y^2$, $c^2 + a^2 = z^2$. Отсюда $a^2 = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2}$; $b^2 = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$; $c^2 = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2}$. Решение a, b, c найдется тогда и только тогда, когда $z^2 + x^2 > y^2$, $x^2 + y^2 > z^2$, $y^2 + z^2 > x^2$.

Если $x = 60$, $y = 100$, то $100^2 - 60^2 < z^2 < 100^2 + 60^2$, откуда $z \in (80; 20\sqrt{34})$.

Получаются целые значения 81, 82, ..., 116. Их сумма равна

$$\frac{81 + 116}{2} \cdot 36 = 3546.$$

4. Подъемная силы $F_1 = \left(\rho_0 - \rho_1 - \frac{m}{V_0}\right)g$; $F_2 = \left(\rho_0 - \rho_2 - \frac{m}{V_0}\right)g$ относятся как

$$\frac{\left(\rho_0 - \rho_1 - \frac{m}{V_0}\right)}{\left(\rho_0 - \rho_2 - \frac{m}{V_0}\right)} = 2 \Rightarrow \frac{m}{V_0} = 2(1 - \beta) - (1 - \alpha), \alpha = \frac{1}{4}; \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$

5. Отложим по горизонтальной оси время X , когда Антилопа придет на водопой, а по вертикальной оси – время Y , когда Лев приходит на водопой. При этом начало координат $(0, 0)$ – это начало 6-ти минутного отрезка времени.

Антилопа встретит Льва, если они придут одновременно ($X = Y$) или

Антилопа придет раньше, но не более, чем на полторы минуты

($X \geq Y - 1,5$), или придет позже Льва, но не более, чем две с половиной

минуты ($X \leq Y + 2,5$). Таким образом,

$$X - 2,5 \leq Y \leq X + 1,5; X, Y \in [0; 6] .$$

Эта область (полоса внутри квадрата) закрашена на рисунке розовым цветом.

Для получения ответа задачи необходимо вычислить часть площади квадрата

6×6 , не входящую в выделенную часть. Это площадь двух треугольников

$$0,5 \cdot 4,5 \cdot 4,5 + 0,5 \cdot 3,5 \cdot 3,5 = 0,5(20,25 + 12,25) = 0,5 \cdot 32,5 = 16,25.$$

Искомая вероятность есть $\frac{16,25}{36} \approx 0,45$.

