

7-8 классы

Внимание! При вычислениях считать **ускорение свободного падения** $g = 10 \text{ м/с}^2$,
универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Везде, где не сказано иное, ответы давать **в единицах СИ**, при необходимости **округлив до сотых**.

Каждое задание оценивается в 20 баллов.

1. Кран с горячей водой наполняет ванну за 5 минут. Кран с холодной водой наполняет ванну за 8 минут. Если вытащить сливную пробку, то полностью заполненная ванна выливается за 6 минут. За сколько минут полностью наполнится ванна, если одновременно открыть оба крана и вытащить сливную пробку? При необходимости округлите ответ до сотых.

$$\{= 6,32\}$$

2. С борта яхты, движущейся с постоянной скоростью против течения, выпала за борт дорогая дамская сумочка одной из туристок. Через 1 минуту после этого капитан отправил матроса на водном мотоцикле вдогонку за сумочкой. Во сколько раз скорость водного мотоцикла больше скорости яхты, если с момента выхода мотоцикла до его возвращения с потерянной сумочкой прошло 4 минуты?

$$\{= 1,5\}$$

3. Бегун на длинные дистанции стартовал на 5-ти километровой дистанции с большой скоростью и довольно быстро пробежал первый километр, но не рассчитал свои силы. Поэтому каждый следующий километр он пробегал на 10% медленнее, чем предыдущий. В результате всю дистанцию он пробежал за 20 минут. За какое время он пробежал первый километр. Ответ дайте в минутах, округлив до сотых по правилам округления.

$$\{= 3,28\}$$

4. С воздушного шара, находящегося на некоторой высоте над плоской поверхностью, производится наблюдение над тремя лежащими на этой поверхности объектами: A , B и C . При этом все три угла, под которыми видны с воздушного шара три отрезка AB , BC и AC , – прямые. Расстояние между объектами B и C равно 60 м, а расстояние между A и C равно 100 м. Найдите все значения (в метрах), которые может принимать расстояние между объектами A и B . В ответе укажите сумму всех таких целых значений.

{= 3546}

5. Обычно воздушный шар наполняли газом плотности ρ_1 . Но однажды наполнили газом вдвое большей плотности ρ_2 . В результате этого подъемная сила воздушного шара изменилась вдвое. Найдите отношение массы оболочки к массе воздуха в объеме оболочки, если плотность более легкого газа ρ_1 относится к плотности воздуха ρ_0 как $\frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{1}{4}$. Температуру и давление газов считать постоянными.

{=0,25}

Решения

1. Решение. Если открыты оба крана, то за 1 минуту наполняется $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ часть ванной. Из-за вытасченной сливной пробки за 1 минуту выливается $\frac{1}{c}$ часть ванной. Значит, в результате за 1 минуту наполняется $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}$ часть ванной.

Таким образом, ванна наполнится за

$$\frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{1}{c}} \text{ минут.}$$

При данных числовых данных получаем $\frac{120}{19} = 6 \frac{6}{19} \approx 6,32$ минут.

2. Рассмотрим движение всех тел в системе координат, связанной с водой. Пусть скорость яхты равна V . Тогда скорость водного мотоцикла равна kV , где k – искомая величина. В момент старта мотоцикла расстояние до сумочки равно Vt_1 ($t_1 = 1$). Из условия задачи следует, что выполняется равенство $2Vt_1 + Vt_2 = kVt_2$ ($t_2 = 4$). Отсюда $k = 1,5$.

3. **Ответ:** 3,28 с. **Решение.** Если первый километр спортсмен пробежал за t минут, то на всю дистанцию он потратит время:

$$t \left(1 + \frac{11}{10} + \left(\frac{11}{10} \right)^2 + \left(\frac{11}{10} \right)^3 + \left(\frac{11}{10} \right)^4 \right) = t \frac{1 - \left(\frac{11}{10} \right)^5}{1 - \frac{11}{10}} = t \frac{(11^5 - 10^5)}{10^4} = 20_{\text{мин}}$$

$$t = \frac{2 \cdot 10^5}{11^4 + 11^3 \cdot 10 + 11^2 \cdot 10^2 + 11 \cdot 10^3 + 10^4} = \frac{20}{1,1^4 + 1,1^3 + 1,1^2 + 1,1 + 1}$$

$$t = \frac{20}{6,1051} \approx 3,28.$$

4. Если обозначить стороны треугольника ABC через x, y, z , а расстояния от объектов до аэростата через a, b, c , то: $a^2 + b^2 = x^2, b^2 + c^2 = y^2, c^2 + a^2 = z^2$. Отсюда $a^2 = \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2}; b^2 = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}; c^2 = \frac{y^2 + z^2 - x^2}{2}$.

Решение a, b, c найдется тогда и только тогда, когда $z^2 + x^2 > y^2, x^2 + y^2 > z^2, y^2 + z^2 > x^2$.

Если $x = 60, y = 100$, то $100^2 - 60^2 < z^2 < 100^2 + 60^2$, откуда $z \in (80; 20\sqrt{34})$.

Получаются целые значения 81, 82, ..., 116. Их сумма равна

$$\frac{81 + 116}{2} \cdot 36 = 3546.$$

5. Подъемная силы $F_1 = \left(\rho_0 - \rho_1 - \frac{m}{V_0}\right)g; F_2 = \left(\rho_0 - \rho_2 - \frac{m}{V_0}\right)g$ относятся как

$$\frac{\left(\rho_0 - \rho_1 - \frac{m}{V_0}\right)}{\left(\rho_0 - \rho_2 - \frac{m}{V_0}\right)} = 2 \Rightarrow \frac{m}{V_0} = 2(1 - \beta) - (1 - \alpha), \alpha = \frac{1}{4}; \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{4}$$