

**Задача 1**

**В-1** Ровно в 8:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 72 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

**Ответ:** 24

**Решение.** Если рассмотреть движение относительно реки, то второй катер за время прошел с собственной скоростью путь от пункта  $B$  до середины  $C$  отрезка  $AB$  и обратно. Поэтому его скорость равна  $72/(11 - 8)$ , причём независимо от скорости течения реки. Ответ: 24.

---

**В-2** Ровно в 9:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 69 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Ответ:** 23

---

**В-3** Ровно в 7:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 70 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

**Ответ:** 14

---

**В-4** Ровно в 6:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 85 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

**Ответ:** 17

---

**В-5** Ровно в 8:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 52 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Ответ:** 26

---

**В-6** Ровно в 9:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 57 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 12:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 4 км/ч?

**Ответ:** 19

---

**В-7** Ровно в 7:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 72 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Вторым катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 11:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 3 км/ч?

**Ответ:** 18

---

**В-8** Ровно в 6:00 от пристани  $A$  вниз по течению реки вышел катер и от пристани  $B$ , находящейся на расстоянии 64 км от  $A$ , навстречу ему с той же собственной скоростью вышел другой катер, а также отплыл плот. Второй катер, встретившись с первым, развернулся и догнал плот в 10:00. Найдите собственные скорости катеров (в км/ч), если скорость течения реки равна 2 км/ч?

**Ответ:** 16

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

---

**Задача 2**

**В-1** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2023.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 136

**Решение.** Заметим, что  $2023 = 7 \cdot 17^2$ .

- 1) Если  $x \geq 0$ , то первый множитель равен  $3x$  и уравнение решений не имеет.
- 2) Если  $y \leq 0$ , то второй множитель равен  $-3y$  и уравнение решений не имеет.
- 3) Пусть  $x < 0$ ,  $y > 0$ . Уравнение примет вид  $-xy = 0$ , откуда возможны решения:  $x = -1$ ;  $y = 2023$ ,  $x = -7$ ;  $y = 289$ ,  $x = -17$ ;  $y = 119$ ,  $x = -119$ ;  $y = 17$ ,  $x = -2023$ ;  $y = 1$ .  
 $\min(|x| + |y|) = 17 + 119 = 136$ .

---

**В-2** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2024.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 90

---

**В-3** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2021.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 90

---

**В-4** Решите уравнение

$$|x + |x + |x|| \cdot || - y| - y| - y| = 2030.$$

в целых числах. В ответ впишите сумму  $|x| + |y|$  для той пары решений, для которых величина  $|x| + |y|$  минимальна.

**Ответ:** 93

---

**В-5** Пусть  $S(n)$  — сумма цифр натурального числа  $n$ . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2007.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

**Ответ:** 1953

**Решение.** Пусть  $S(n)$  — сумма цифр натурального числа  $n$ . Число 2007 кратно 3 и 9. Так как  $3S(n)$  делится на 3, то  $n$  тоже должно делиться на 3. А значит,  $3S(n)$  делится на 9. В таком случае  $n$  тоже должно делиться на 9. Докажем, что  $n$  — четырехзначное число. Пусть  $n < 1000$ . Тогда  $S(n) < 3 \cdot 9 = 27$ . Таким образом,  $n + 3S(n) < 1000 + 3 \cdot 27 = 1081 < 2007$ . Противоречие. Число  $n$  пятизначным тоже быть, очевидно, не может. То есть  $n$  — четырехзначное натуральное число,  $n \leq 9999$ ,  $S(n) \leq 36$ . Тогда  $S(n)$  равно 9, 18, 27 либо 36.  $n = 2007 - 3S(n)$ . Так что нужно проверить варианты, когда  $n$  равно  $2007 - 108 = 1899$ ,  $2007 - 81 = 1926$ ,  $2007 - 54 = 1953$  и  $2007 - 27 = 1980$ , и выбрать из них наименьшее подходящее. Если  $n = 1899$ , то  $S(n) = 27$ ,

следовательно  $n+3S(n) = 1971+3\cdot 27 = 2052 \neq 2007$ . Если  $n = 1926$ , то  $S(n) = 18$ , следовательно  $n+3S(n) = 1926+3\cdot 18 = 1980 \neq 2007$ . Если  $n = 1953$ , то  $S(n) = 18$ , следовательно  $n+3S(n) = 1953+3\cdot 18 = 2007$ . Если  $n = 1980$ , то  $S(n) = 18$ , следовательно  $n+3S(n) = 1980+3\cdot 18 = 2034 \neq 2007$ . Таким образом, ответ в задаче  $n = 1953$ .

---

**В-6** Пусть  $S(n)$  — сумма цифр натурального числа  $n$ . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2016.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

**Ответ:** 1962

---

**В-7** Пусть  $S(n)$  — сумма цифр натурального числа  $n$ . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2025.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

**Ответ:** 1971

---

**В-8** Пусть  $S(n)$  — сумма цифр натурального числа  $n$ . Решите уравнение

$$n + 3S(n) = 2034.$$

Если решений несколько, в ответе укажите наименьшее из них.

**Ответ:** 1980

---

### Задача 3

**В-1** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{6}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 429

**Решение.** Пусть ребро куба равно 2, тогда диагональ октаэдра равна  $2k$  ( $k = \frac{6}{5}$ ). Так как  $1 < k < 2$ , то из грани куба выпирает пирамидальный кончик октаэдра, и выступает он на высоту, равную  $k - 1$ . Объём одного такого кончика равен  $4 \cdot \frac{1}{6} \cdot (k - 1)^3$ , а всего их торчит 6 штук, в сумме  $4(k - 1)^3$ . Объём самого октаэдра легко посчитать, разбив его на кусочки, он равен  $\frac{4}{3}k^3$ . Объём куба равен  $2^3 = 8$ .

Сложив и вычтя эти значения в надлежащем порядке (объём куба - (объём октаэдра - объём кончиков)), мы получим объём остатка от куба, и его отношение к объёму куба равно

$$\frac{1}{3}k^3 - \frac{3}{2}k^2 + \frac{3}{2}k + \frac{1}{2}.$$

Подставляя значение  $k = \frac{6}{5}$ , получим  $\frac{179}{250}$ , откуда берётся ответ.

---

**В-2** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{7}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 1181

---

**В-3** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{8}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 1069

---

**В-4** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{9}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 321

---

**В-5** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный

октаэдр в 125 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 0

---

**В-6** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в 125 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 0

---

**В-7** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в 135 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 0

---

**В-8** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в 145 раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 0

---

**В-9** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{11}{5}$  раз (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 407

**Решение.** Пусть ребро куба равно 2, тогда диагональ октаэдра равна  $2k$  ( $k = \frac{11}{5}$ ). Так как  $k > 2$ , то из граней октаэдра выпирают вершинки куба. Насколько высоко? Расстояние от центра куба до его вершины равно  $\sqrt{3}$ . Дальше нужно понять, как связаны величины  $h$  и  $b$ , где  $h$  — высота треугольной пирамиды, полученной отсечением «угла» куба перпендикулярно диагонали куба так, чтобы от ребра куба осталось  $b$ . Считаем объём такой пирамидки двумя способами (с основанием — равносторонним треугольником и основанием — прямоугольным треугольником.) Получаем, что  $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}b^3 = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}b^2$ , то есть  $b = \sqrt{3}h$ . Из формулы получаем, что расстояние от центра до грани октаэдра равно  $\frac{k}{\sqrt{3}}$ , то есть вершинки куба выпирают на высоту  $\sqrt{3} - \frac{k}{\sqrt{3}}$ , а прилегающие к высоте рёбра имеют длину  $\sqrt{3} \left( \sqrt{3} - \frac{k}{\sqrt{3}} \right) = 3 - k$ .

Объём остатков куба равен  $\frac{8}{6}(3 - k)^3$ , а отношение его к объёму самого куба равно  $\frac{1}{6}(3 - k)^3$ . Подставляя значение  $k = \frac{11}{5}$ , получим  $\frac{32}{375}$ , откуда берётся ответ.

---

**В-10** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{12}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 259

---

**В-11** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{13}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 379

---

**В-12** Иммануил открыл трёхмерный редактор Blender и создал в нём куб. Потом он поместил в центр каждой грани куба по точке и соединил их в октаэдр. Затем он увеличил полученный октаэдр в  $\frac{14}{5}$  раза (центр октаэдра остался на прежнем месте, октаэдр не поворачивался) и удалил из куба всё, что оказалось внутри октаэдра. Какая доля (по объёму) куба осталась? Доведите дробь до несократимой и в ответе укажите сумму её числителя и знаменателя. Или, если ответ иррациональный (только в этом случае) запишите его в виде десятичной дроби, до второго знака после запятой.

**Ответ:** 751

---

**Задача 4**

**В-1** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

**Ответ:** 24200%

**Решение.** Решение. По условию  $a_1 = S_1 = 3^0 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ . Также

$$a_n = S_n - S_{n-1} = 3^{n-1} - 3^{n-2} = 2 \cdot 3^{n-2}.$$

Заметим, что  $a_1$  удовлетворяет последней формуле. Значит, данная последовательность — геометрическая прогрессия со знаменателем  $q = 3$  и первым членом  $a_1 = \frac{2}{3}$ . (Заметим, что тот факт, что это геометрическая прогрессия, здесь несущественен, важно, что найдена формула общего члена). Тогда  $a_{10} = 2 \cdot 3^{10-2} = 2 \cdot 3^8$ ,  $a_5 = 2 \cdot 3^3$ . Первое число больше второго на

$$\frac{2 \cdot 3^8 - 2 \cdot 3^3}{2 \cdot 3^3} \cdot 100\% = (3^5 - 1) \cdot 100\% = 24200\%$$

---

**В-2** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем пятый ?

**Ответ:** 102300%

---

**В-3** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 3^{n-1} - \frac{1}{3}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем четвёртый ?

**Ответ:** 72800%

---

**В-4** Сумма первых  $n$  членов последовательности  $\{a_n\}$  определяется формулой

$$S_n = 4^{n-1} - \frac{1}{4}.$$

На сколько процентов 10-й член этой последовательности больше, чем шестой ?

**Ответ:** 25500%

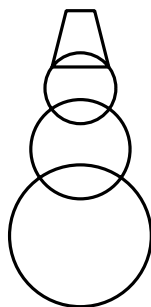
---



**Задача 5**

**В-1** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 7 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



**Ответ:** 41.6

**Решение.** Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 7, т. е.  $\sqrt{149}$ .
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 7, т. е.  $\sqrt{74}$ .
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом  $8/2$ , т. е.  $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .

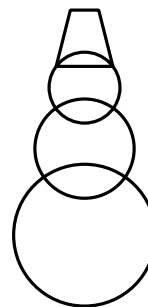
5) Высота трапеции равна  $\sqrt{8^2 - \left(\frac{8-4}{2}\right)^2} = \sqrt{60}$ .

Итого,  $10 + \sqrt{149} + \sqrt{74} + \sqrt{60} + 3 = 41.55484 \dots \approx 41.6$ .

---

**В-2** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 9 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобокой трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.



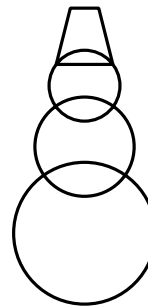
**Ответ:** 48.8

---

**В-3** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции со сторонами 8, 8, 8 и 4.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

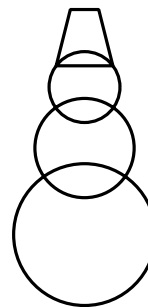
**Ответ:** 43.0



**В-4** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции со сторонами 9, 9, 9 и 5.

Какой высоты получился снеговик? Ответ округлить до десятых.

**Ответ:** 47.3



**В-5** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 8. Высота снеговика получилась равной 43.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

**Ответ:** 4.11

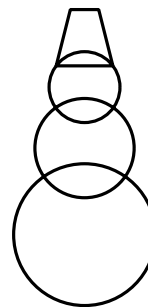
**Решение:** Высота снеговика складывается из пяти слагаемых:

- 1) радиус нижнего круга,
- 2) расстояние между центрами нижнего и среднего кругов,
- 3) расстояние между центрами верхнего и среднего кругов,
- 4) расстояние от центра верхнего круга до нижнего края ведра,
- 5) высота ведра.

Считаем.

- 1) Радиус нижнего круга равен 10.
- 2) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 10 и 8, т. е.  $\sqrt{164}$ .
- 3) Гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами 5 и 8, т. е.  $\sqrt{89}$ .
- 4) Катет треугольника с гипотенузой 5 и другим катетом  $8/2$ , т. е.  $\sqrt{5^2 - 4^2} = 3$ .
- 5) Высота трапеции равна  $43 - 10 - \sqrt{164} - \sqrt{89} - 3 = 30 - \sqrt{164} - \sqrt{89}$ .

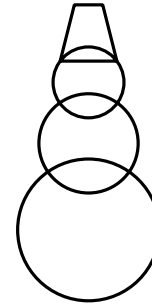
Её верхнее основание равно  $8 - 2\sqrt{8^2 - (30 - \sqrt{164} - \sqrt{89})^2} = 4.1084895 \dots \approx 4.11$



**В-6** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 12, 10 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 9. Высота снеговика получилась равной 52.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

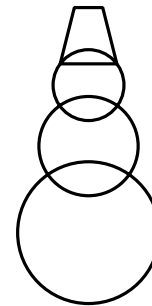
**Ответ:** 4.78



**В-7** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 7 и 4. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 7. Высота снеговика получилась равной 41.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

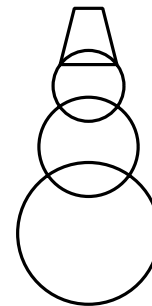
**Ответ:** 5.56



**В-8** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 10, 8 и 5. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 8. Высота снеговика получилась равной 43.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

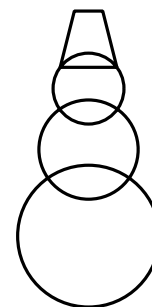
**Ответ:** 4.11



**В-9** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 12, 10 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 9. Высота снеговика получилась равной 52.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

**Ответ:** 4.78

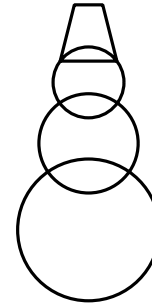


**В-10** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 7 и 4. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 7. Высота снеговика получилась равной 41.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

**Ответ:** 5.56

---

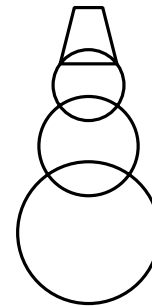


**В-11** Вася нарисовал снеговика на новогоднем плакате. Снеговик состоит из трех кругов, центры которых лежат на одной вертикальной прямой. Радиусы кругов (снизу вверх) равны 11, 8 и 6. Круги пересекаются под прямым углом, т. е. их касательные в точках пересечения перпендикулярны. На голове у снеговика ведро вверх дном, нарисованное в виде равнобоочной трапеции, у которой боковые стороны и нижнее основание равны 8. Высота снеговика получилась равной 47.

Чему равен диаметр дна у ведра? Ответ округлить до сотых.

**Ответ:** 5.83

---



**Задача 6**

**В-1** Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника  $\alpha$ , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha - 2(\sqrt{3} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{3})} \geq \cos 2\alpha + 3 \sin \alpha - 2$$

Ответ укажите в градусах

**Ответ:** 30

**Решение.** Наименьший угол треугольника не может быть больше  $60^\circ$ . Воспользуемся формулой  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$ , заменим  $\sin \alpha = t$ . Тогда неравенство примет вид

$$\sqrt{\sqrt{3} - 4t^2 - 2(\sqrt{3} - 1)t} \geq 3t - 2t^2 - 1 \Leftrightarrow \sqrt{(\sqrt{3} + 2t)(1 - 2t)} \geq (1 - 2t)(t - 1).$$

ОДЗ для переменной  $t$  — область  $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$ . На этой области правая часть неравенства отрицательна (исключая точку  $t = \frac{1}{2}$ , где она равна нулю). Получается, что неравенство выполнено на всей ОДЗ, и  $t = \sin \alpha \leq \frac{1}{2}$ . Отсюда получаем максимальное значение в 30 градусов.

---

**В-2** Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника  $\alpha$ , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha - 2(\sqrt{2} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{2})} \geq 3 \cos 2\alpha + 7 \sin \alpha - 5$$

Ответ укажите в градусах

**Ответ:** 30

---

**В-3** Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника  $\alpha$ , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha + 2(\sqrt{3} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{3})} \geq \cos 2\alpha + (\sqrt{3} + 2) \sin \alpha - 1 - \sqrt{3}$$

Ответ укажите в градусах

**Ответ:** 60

---

**В-4** Какое наибольшее значение может иметь наименьший угол треугольника  $\alpha$ , если его значение может меняться в пределах, заданных условием:

$$\sqrt{2 \cos 2\alpha + 2(\sqrt{2} - 1) \sin \alpha - (2 - \sqrt{2})} \geq \cos 2\alpha + (\sqrt{2} + 2) \sin \alpha - 1 - \sqrt{2}$$

Ответ укажите в градусах

**Ответ:** 45

---

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова  
**Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике**

Отборочный этап 2023/24 учебного года для 11 класса

---

**Задача 7**

**В-1** Найдите сумму всех значений  $x \in [0^\circ, 10^\circ]$  в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) + \sin^2 81x + \cos^2 81x = 0.$$

Эту сумму запишите в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n$  взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите  $m + n$ .

**Ответ:** 950

**Решение.** Так как

$$4 \cos^2 x - 1 = 3 - 4 \sin^2 x = \frac{3 \sin x - 4 \sin^3 x}{\sin x} = \frac{\sin 3x}{\sin x},$$

то исходное уравнение приводится к виду

$$\frac{\sin 3x}{\sin x} \frac{\sin 9x}{\sin 3x} \frac{\sin 27x}{\sin 9x} \frac{\sin 81x}{\sin 27x} + 1 = 0.$$

Отсюда  $\frac{\sin 81x}{\sin x} = -1$ , то есть  $\sin 81x = \sin(-x)$ , и при этом  $\sin x \neq 0$ , так как для него значения  $\cos^2 x$  равны 1. Поэтому значения  $x$  в градусах равны  $81x = -x + 360k$  и  $81x = 180 + x + 360n$ , то есть  $x = \frac{180k}{41}$  и  $x = \frac{9(1+2n)}{41}$ , где  $k \neq 41m, k, n, m \in \mathbb{Z}$ . В заданный отрезок попадают значения  $\frac{180}{41}, \frac{360}{41}, \frac{9}{41}, \frac{27}{41}$ . В сумме это  $\frac{909}{41}$ , в ответ указываем  $909 + 41 = 950$ .

---

**В-2** Найдите сумму всех значений  $x \in [0^\circ, 10^\circ]$  в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) = \sin^2 81x + \cos^2 81x.$$

Эту сумму запишите в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n$  взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите  $m - n$ .

**Ответ:** 1745

---

**В-3** Найдите сумму всех значений  $x \in [0^\circ, 10^\circ]$  в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) + \sin^2 81x + \cos^2 81x = 0.$$

Эту сумму запишите в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n$  взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите  $m - n$ .

**Ответ:** 868

---

**В-4** Найдите сумму всех значений  $x \in [0^\circ, 10^\circ]$  в градусах, при каждом из которых выполнено равенство

$$(4 \cos^2 x - 1)(4 \cos^2 3x - 1)(4 \cos^2 9x - 1)(4 \cos^2 27x - 1) = \sin^2 81x + \cos^2 81x.$$

Эту сумму запишите в виде  $\frac{m}{n}$ , где  $m, n$  взаимно простые натуральные числа. В ответе укажите  $m + n$ .

**Ответ:** 1909

---

**Задача 8**

**В-1** Решите систему

$$\begin{cases} 1 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - y} + y} = x + 4y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех  $x$ , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных  $y$  найдутся одинаковые  $x$  — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

**Ответ:** 16.22

**Решение.** Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что  $a + b = 5$

Сделаем замену  $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + ay$ . Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = -2y$  ( $y \leq 0$ ) или  $t = 3y$  ( $y \geq 0$ ).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть  $t = -2y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда  $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{4}$  (не подходит). Следовательно,  $x = 16 - 2a$ .

2) Пусть  $t = 3y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда  $9y^2 + 5y - 4 = 0$ . Следовательно,  $y = -1$  (не подходит),  $y = \frac{4}{9}$ ,  $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$ .

Отметим, что совпадающих значений  $x$  не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16,22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20,89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13,11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22,44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11,56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19,33.$$

---

**В-2** Решите систему

$$\begin{cases} -2 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x + 2y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x + 2y} + 4y} = x + 7y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех  $x$ , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных  $y$  найдутся одинаковые  $x$  — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

**Ответ:** 20.89

**Решение.** Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что  $a + b = 5$

Сделаем замену  $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + ay$ . Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = -2y$  ( $y \leq 0$ ) или  $t = 3y$  ( $y \geq 0$ ).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть  $t = -2y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда  $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{4}$  (не подходит). Следовательно,  $x = 16 - 2a$ .

2) Пусть  $t = 3y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда  $9y^2 + 5y - 4 = 0$ . Следовательно,  $y = -1$  (не подходит),  $y = \frac{4}{9}$ ,  $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$ .

Отметим, что совпадающих значений  $x$  не нашлось.

Числа в вариантах:

$a = 1, b = 4$  сумма  $= \frac{146}{9} \approx 16,22$ .

$a = -2, b = 7$ , сумма  $= \frac{188}{9} \approx 20,89$ .

$a = 3, b = 2$ , сумма  $= \frac{118}{9} \approx 13,11$ .

$a = -3, b = 8$ , сумма  $= \frac{202}{9} \approx 22,44$ .

$a = 4, b = 1$ , сумма  $= \frac{104}{9} \approx 11,56$ .

$a = -1, b = 6$ , сумма  $= \frac{58}{3} \approx 19,33$ .

**В-3** Решите систему

$$\begin{cases} 3 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - 3y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 3y} - y} = x + 2y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех  $x$ , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных  $y$  найдутся одинаковые  $x$  — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

**Ответ:** 13.11

**Решение.** Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что  $a + b = 5$



Сделаем замену  $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + ay$ . Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = -2y$  ( $y \leq 0$ ) или  $t = 3y$  ( $y \geq 0$ ).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть  $t = -2y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда  $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{4}$  (не подходит). Следовательно,  $x = 16 - 2a$ .

2) Пусть  $t = 3y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда  $9y^2 + 5y - 4 = 0$ . Следовательно,  $y = -1$  (не подходит),  $y = \frac{4}{9}$ ,  $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$ .

Отметим, что совпадающих значений  $x$  не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16,22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20,89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13,11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22,44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11,56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19,33.$$

#### В-4 Решите систему

$$\begin{cases} -3 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x + 3y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x + 3y} + 5y} = x + 8y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех  $x$ , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных  $y$  найдутся одинаковые  $x$  — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

**Ответ:** 22.44

**Решение.** Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что  $a + b = 5$

Сделаем замену  $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + ay$ . Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = -2y$  ( $y \leq 0$ ) или  $t = 3y$  ( $y \geq 0$ ).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть  $t = -2y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда  $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{4}$  (не подходит). Следовательно,  $x = 16 - 2a$ .

2) Пусть  $t = 3y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда  $9y^2 + 5y - 4 = 0$ . Следовательно,  $y = -1$  (не подходит),  $y = \frac{4}{9}$ ,  $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$ .

Отметим, что совпадающих значений  $x$  не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16,22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20,89.$$

$$a = 3, b = 2, \text{ сумма} = \frac{118}{9} \approx 13,11.$$

$$a = -3, b = 8, \text{ сумма} = \frac{202}{9} \approx 22,44.$$

$$a = 4, b = 1, \text{ сумма} = \frac{104}{9} \approx 11,56.$$

$$a = -1, b = 6, \text{ сумма} = \frac{58}{3} \approx 19,33.$$

### В-5 Решите систему

$$\begin{cases} 4 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - 4y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - 4y} - 2y} = x + y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех  $x$ , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных  $y$  найдутся одинаковые  $x$  — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

**Ответ:** 11.56

**Решение.** Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что  $a + b = 5$

Сделаем замену  $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + ay$ . Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = -2y$  ( $y \leq 0$ ) или  $t = 3y$  ( $y \geq 0$ ).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть  $t = -2y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда  $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{4}$  (не подходит). Следовательно,  $x = 16 - 2a$ .

2) Пусть  $t = 3y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда  $9y^2 + 5y - 4 = 0$ . Следовательно,  $y = -1$  (не подходит),  $y = \frac{4}{9}$ ,  $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$ .

Отметим, что совпадающих значений  $x$  не нашлось.

Числа в вариантах:

$$a = 1, b = 4 \text{ сумма} = \frac{146}{9} \approx 16,22.$$

$$a = -2, b = 7, \text{ сумма} = \frac{188}{9} \approx 20,89.$$

$a = 3, b = 2$ , сумма  $= \frac{118}{9} \approx 13, 11$ .  
 $a = -3, b = 8$ , сумма  $= \frac{202}{9} \approx 22, 44$ .  
 $a = 4, b = 1$ , сумма  $= \frac{104}{9} \approx 11, 56$ .  
 $a = -1, b = 6$ , сумма  $= \frac{58}{3} \approx 19, 33$ .

---

**В-6** Решите систему

$$\begin{cases} -1 + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x+y}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x+y} + 3y} = x + 6y - 2. \end{cases}$$

Если решений бесконечно много в ответ впишите 0. Если решений нет, то тоже впишите 0. Если решений конечное количество, в ответ впишите сумму всех  $x$ , при необходимости округлив результат до сотых (если при разных  $y$  найдутся одинаковые  $x$  — складывайте повторы, слагаемых должно получиться столько же, сколько точек на плоскости подходит под систему).

**Ответ:** 19.33

**Решение.** Систему запишем в общем виде

$$\begin{cases} a + 6y = \frac{x}{y} - \sqrt{x - ay}, \\ \sqrt{x + \sqrt{x - ay} - (a - 2)y} = x + by - 2. \end{cases}$$

Коэффициенты такие, что  $a + b = 5$

Сделаем замену  $\sqrt{x - ay} = t \geq 0$ . Тогда  $x = t^2 + ay$ . Первое уравнение системы примет вид

$$ay + 6y^2 = t^2 + ay - ty \Leftrightarrow t^2 - ty - 6y^2 = 0.$$

Рассматривая его как квадратное уравнение относительно  $t$ , получаем  $t = -2y$  ( $y \leq 0$ ) или  $t = 3y$  ( $y \geq 0$ ).

Второе уравнение после замены имеет вид

$$\sqrt{t^2 + 2y + t} = t^2 + (a + b)y - 2.$$

1) Пусть  $t = -2y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{t^2} = 4y^2 + (a + b)y - 2.$$

Тогда  $-2y = 4y^2 + 5y - 2 = 0 \Leftrightarrow 4y^2 + 7y - 2 = 0$ , откуда  $y = -2$  или  $y = \frac{1}{4}$  (не подходит). Следовательно,  $x = 16 - 2a$ .

2) Пусть  $t = 3y$ . Второе уравнение примет вид

$$\sqrt{9y^2 + 5y} = 9y^2 + 5y - 2 \Leftrightarrow (\sqrt{9y^2 + 5y} + 1)(\sqrt{9y^2 + 5y} - 2) = 0,$$

откуда  $9y^2 + 5y - 4 = 0$ . Следовательно,  $y = -1$  (не подходит),  $y = \frac{4}{9}$ ,  $x = \frac{16}{9} + \frac{4a}{9} = \frac{16+4a}{9}$ .

Отметим, что совпадающих значений  $x$  не нашлось.

Числа в вариантах:

$a = 1, b = 4$  сумма  $= \frac{146}{9} \approx 16, 22$ .  
 $a = -2, b = 7$ , сумма  $= \frac{188}{9} \approx 20, 89$ .  
 $a = 3, b = 2$ , сумма  $= \frac{118}{9} \approx 13, 11$ .  
 $a = -3, b = 8$ , сумма  $= \frac{202}{9} \approx 22, 44$ .  
 $a = 4, b = 1$ , сумма  $= \frac{104}{9} \approx 11, 56$ .  
 $a = -1, b = 6$ , сумма  $= \frac{58}{3} \approx 19, 33$ .

---