11 класс. Задача 1

Решение. Пусть метеорит летит со скоростью $\vec{u}$ до столкновения. Пусть его скорость равна $\vec{v}$ после столкновения, а скорость спутника (она до столкновения равна нулю) равна $\vec{w}$ после столкновения. Запишем закон сохранения импульса $m_1(u-v)=m_2w$ и закон сохранения энергии $m_1u^2=m_1v^2+m_2w^2$. Задача является плоской. Выберем оси Ox (по нормали к спутнику) и Oy (по касательной) с началом координат O в точке удара. Спроектируем два наших равенства на оси. По оси y воздействия на спутник нет вообще, значит, $u_y=v_y$, а $w_y=0$. По оси x видим два уравнения $w_x=\frac{m_1}{m_2}(u_x-v_x)$ и $m_1u_x^2=m_1v_x^2+m_2w_x^2$. Подставляем из первого уравнения во второе и решаем квадратное уравнение на v_x. Получим $v_x=u_x\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}$. Теперь находим

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{|v_y|}{|v_x|}=\frac{|u_y|}{|u_x|}\cdot\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}=\frac{m_2-m_1}{m_2+m_1}\operatorname{tg}\alpha.$$

Если $m_2>>m_1$, то $\operatorname{tg}\beta\approx\operatorname{tg}\alpha$ (угол падения равен углу отражения).

Критерии проверки

8 — ответ получен, но требует значительных упрощений;
6 — система верная, доведено до ответа, но ошибка в решении системы;
4 — угол падения равен углу отражения (с аргументацией);
4 — верные рассуждения, законы, попытка решения, но ответ не получен;
4 — ошибка в физической модели;
2 — только выписаны законы или центральный удар или необоснованный вывод о прямом угле.

11 класс. Задача 2

Решение: Прежде всего найдем, какие значения может принимать координата z, то есть при каких z у системы есть решение (x,y,z). По координатам y и z координата x всегда восстанавливается однозначно $x=z+y-1$, подставим во второе уравнение, получим, что $y^2+(z-1)y+z^2+14-7z=0$, тогда это уравнение разрешимо относительно y, если его дискриминант $D=(z-1)^-4(z^2+14-7z)=-3z^2+26z-55=(z-5)(11-3z)\geqslant 0$, то есть при $z\in[11/3,5]$. Теперь найдем функцию, которую нам надо максимизировать. Поскольку $\sqrt{t}$ — возрастающая функция, то вместо поиска наибольшего значения для $\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ будем искать наибольшее значение функции $x_0^2+y_0^2$. Выразим эту функцию из нашей системы: $x-y=z-1$, $xy=-z^2-14+7z$, $x^2+y^2=(x-y)^2+2xy=-z^2-12z-27$. Это парабола, ветви которой направлены вниз и вершина находится в $z=6$, значит на нашем отрезке $z\in[11/3,5]$ функция монотонно возрастает, а значит достигает своего наибольшего значения при $z=5$. *Ответ:* $z=5$.

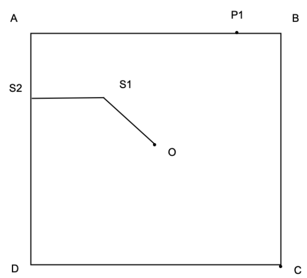
Критерии проверки:

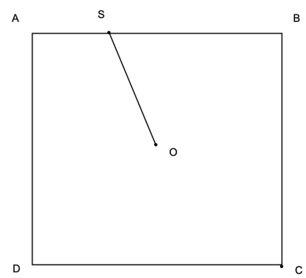
10 баллов— Верное решение, верный ответ.
8 баллов— Верно найдена функция, которую надо максимизировать, как функция от z, найдена ее точка максимума, но не учтены ограничения на z.
3 балла — Найдены какие-то зависимости: $y(z)$, $x(z)$, $y(x)$.

11 класс. Задача 3

Решение: Мальчик сможет спастись от наказания. Выигрышных стратегий для мальчика здесь бесконечно много,в качестве решения достаточно привести любой подходящий и путь и доказать, что он подходит. Приведем некоторые примеры. Далее возьмем сторону квадрата за 1.

Вариант 1: Будем считать, что отец находится в сточке C. Тогда сын может сначала





двигаться по диагонали, пока не пройдет половину ее длины до $S1$. Пока сын движется по диагонали отец обязан двигаться либо вверх потом влево, либо влево, потом вверх, без ограничения общности считаем, что он движется вверх потом влево. Тогда путь мальчика $OS1 = \sqrt{2}/4$. За это время отец пройдет путь $3\sqrt{2}/4 > 1$, а значит окажется уже на стороне AB в точке $P1$. После этого сын проходит отрезок $S1S2$, учитывая, что отец находится на AB, ему выгоднее продолжать двигаться по ней влево и потом поворачивать вниз. Суммарный путь сына $\sqrt{2}/4 + 1/4$, путь отца $3\sqrt{2}/4 + 3/4 < 2,25$, значит сын успеет убежать.

Вариант 2: Пусть $AS = 1/4$, тогда сын пройдет путь $OS = \sqrt{5}/4$. Отцу оптимально двигаться вверх и налево, он за это время пройдет путь $3\sqrt{5}/4 < 1,75$.

Критерии проверки:

10 баллов — Верное решение

9 баллов — Верное решение с опечаткой/арифметической ошибкой, не влияющей на доказательство того, что путь подходит.

8 баллов — Верное решение с пробелами в обосновании того, что путь подходит

6 баллов— Верная модель для поиска подходящего пути, которую либо не удалось до конца исследовать, либо она была исследована неверно. Либо верный алгоритм построения пути, но без обоснования

4 балла — Предложен неверный алгоритм построения пути, в обосновании алгоритма содержатся неверные или недоказанные утверждения. Либо утверждается, что подходящего пути нет, но есть попытка (неверно) обосновать, почему это так.

3 балла — Рассматриваются частные случаи, показано, что они не подходят (или, ошибочно, что они подходят)

0 — Рассматриваются решения с нарушенными условиями задачи (отец начинает движение не из угла или ходит по воде)

11 класс. Задача 4

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
int k, n, m, s;
cin >> k >> n >> m >> s;
if ( m == 1 )
if ( s == k ) cout << ""YES"";
else cout << ""NO"";
else
if ( (s > k) && ((s-k) % ((m-1)*n) == 0))  cout << ""YES"";
else cout << ""NO"";
return 0;
}
```

Критерии проверки
0 баллов — нет решения, или есть пример вычислений не оформленный в код
1 балл — решение в виде текста или exe–файл
2-3 балла — псевдокод с верной формулой
4-5 баллов — код с неверной формулой
6-7 баллов — задача решена верно, но есть ошибка в коде: не учтен вариант с $m == 1$. Либо программа входит в бесконечный цикл
8-9 баллов — задача решена верно, но не проверено $s >= k$, либо неверный формат ввода/вывода
10 баллов — задача решена верно

11 класс. Задача 5

Решение: Первый игрок задал число n. Чтобы выиграть, второму игроку нужно выбрать n различных чисел от 1 до $2n$ так, чтобы никакие два из них не давали в сумме число $2n+1$, тогда первый игрок не сможет составить выигрышную сумму. Разобьем числа на пары, дающий в сумме $2n+1$: $(1, 2n)$, $(2, 2n-1)$, ..., $(n, n+1)$, таких пар n. Из каждой пары второму игроку нужно выбрать ровно одно число: если он из какой-то пары выберет два числа, то они в сумме дадут $2n+1$ и первый ирок выиграет, если же из какой-то пары он не выберет ни одно число, то поскольку ему нужно всего выбрать n чисел, то по принципу Дирихле из какой-то пары придется взять оба числа. Таким образом, выигрышных комбинаций столько, сколько способов выбрать по одному числу из каждой пары, то есть 2^n.
Ответ: 2^n

Критерии проверки:
10 баллов — Верное решение
7 баллов — Верно описано, как должна быть устроена выигрышная комбинация, есть

неверные попытки посчитать их количество
5 баллов — Предложены какие-то конкретные выигрышный комбинации, либо есть описание того, как должна быть устроена выигрышная комбинация, но нет подсчета количества
3 балла — Неверное понимание условия, подсчитано число пар, дающих в сумме $2n+1$, либо дополнение к ним.

11 класс. Задача 6

```
def count_lucky_tickets(N):
    count = 0
    for ticket in range(1000000):
        ticket = str(ticket)
        if len(ticket) < 6:
            ticket = ""0""*(6-len(ticket)) + ticket
        digits = [int(digit) for digit in str(ticket)]
        if sum(digits[:3]) == sum(digits[3:]):
            if sum(digits[:3]) >= N:
                count += 1
    return count

N = int(input())
result = count_lucky_tickets(N)
print(result)
```

Критерии проверки
0 баллов — Нет решения, или есть пример вычислений не оформленный в код
1 балл — Решение в виде текста или exe–файл
2-3 балла — Псевдокод с верной формулой
6-7 баллов — Задача решена верно, но есть ошибка в коде: не учтен вариант с билетами, начинающимися с 0
8-9 баллов — Задача решена верно, но неверный формат ввода/вывода
10 баллов — Задача решена верно.

11 класс. Задача 7

Решение: Заметим, что функция $g(x)$ также является 2-периодической:

$$g(x+2) = \left[\frac{x+2}{2} - \left[\frac{x+2}{2}\right] - \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{4} = \left[\{\frac{x}{2}+1\} - \frac{1}{2}\right] = \left[\{\frac{x}{2}\} - \frac{1}{2}\right] = g(x),$$

где $\{t\} = t - [t]$ — дробная часть числа t. Значит достаточно изучить решения уравнения на промежутке $[0,2)$. Поймем как на этом отрезке устроена функция $g(x)$:
При $0 \leqslant x < 1$ верно $0 \leqslant \{\frac{x}{2}\} < 1/2$, а значит $-1 \leqslant \{\frac{x}{2}\} - 1/2 < 0$, то есть $\left[\{\frac{x}{2}\} - 1/2\right] = -1$, а $g(x) = -1 + 1/4 = -3/4$, но функция $f(x)$ неотрицательна, значит пересечений нет.

При $1 \leqslant x < 2$ верно $1/2 \leqslant \{\frac{x}{2}\} < 1$, $\left[\{\frac{x}{2}\} - 1/2\right] = 0$, а $g(x) = 1/4$. На промежутке $[1, 2)$ уравнение $f(x) = 1/4$ имеет единственное решение $x = 7/4$.
Таким образом, в силу 2-периодичности обеих функций, все решения уравнения $f(x) = g(x)$ имеют вид $x_n = 7/4 + 2(n-1)$, а значит $x_{500} = 7/4 + 2 \cdot 499 = 999,75$.

Критерии проверки:

10 баллов — Верное решение, верный ответ

9 баллов — Верное решение, но нет обоснования, почему вид функции $g(x)$ именно такой

5 баллов — Получен верный вид функции $g(x)$

3 балла — Получен неверный вид $g(x)$ или есть попытки его получить

11 класс. Задача 8

Решение. Земля делает полный оборот в 360^o за 86164 секунды. Составляем пропорцию

$$\frac{90}{x^o} = \frac{86164}{360^o},$$

откуда находим, что за время 90 минут Земля повернулась на $22,56^o$. Принимается за верное и решение, где полный оборот Земли занимает 24 часа, т.е. 86400 секунд. Тогда получится $22,5^o$. Мы нашли разницу между точками A и B по долготе. Широта у них одинаковая и равна $\varphi = 48^o$. Наклон орбиты для решения задачи вообще не важен. Итак, надо найти расстояние по поверхности земли между точками $A = (\varphi, \psi)$ и $B = (\varphi, \psi + \delta_\psi)$ в сферической системе координат, $\delta_\psi = 22,56^o$.

1 способ (неточный). Находим радиус окружности по поверхности Земли на φ градусах широты: $R\cos(\varphi)$. Теперь находим длину дуги $\ell = R\cos\varphi \cdot \delta_\psi$ (все углы в радианах). Получаем

$$\ell = 6370 \cdot \cos(48^o) \cdot 22,56 \cdot \frac{\pi}{180} = 1678 \text{ км}.$$

2 способ (более точный). Расстояние между точками на поверхности Земли надо считать как длину окружности большого круга. Сначала находим радиус вектор точки A — он равен $R(\cos\varphi\cos\psi, \cos\varphi\sin\psi, \sin\varphi)$ и точки B: $R(\cos\varphi\cos(\psi+\delta_\psi), \cos\varphi\sin(\psi+\delta_\psi), \sin\varphi)$. Теперь считаем косинус угла между этими векторами:

$$\cos\gamma = \cos^2\varphi\cos\delta_\psi + \sin^2\varphi.$$

Теперь считаем длину дуги

$$\ell = R \cdot \gamma = R\arccos(\cos^2\varphi\cos\delta_\psi + \sin^2\varphi) = 1672 \text{ км}.$$

Ответ: 1678 или 1672 км.

Критерии проверки:

8 — верное решение, но ошибка в подсчетах;

8 — неверно прочитано условие, но получилась разумная постановка, в которой задача верно решена;

6 — верные рассуждения, но явный ответ не получен или на порядок отличается от верного.

4 — разумные, но неверные рассуждения, получен неверный ответ.

9-10 класс. Задача 1

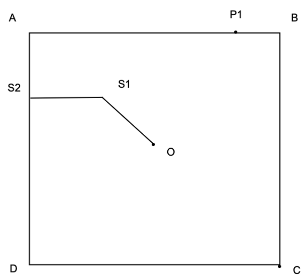
```
#include <iostream>
#include <math.h>
using namespace std;

double dist(double x, double y, double i){
    return sqrt( (x-i)*(x-i) + y*y);
}

int main( ){
    double x, y, d; int i; bool flag = true;
    cin >> x >> y;
    for (i=0; i<100 && flag && (d = dist(x, y, i)) >= 1.0; i++){
        x += (i-x)/d; y -= y/d; flag = dist(x, y, i) >= 1.0;
    }
    if ( !flag || d < 1) cout << ""YES"";
    else cout << ""NO"";
    return 0;
}
```

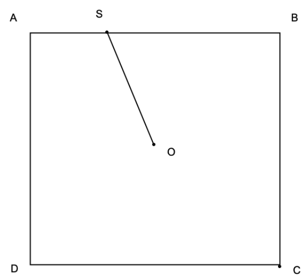
Критерии проверки
0 баллов — Нет решения, или есть пример вычислений не оформленный в код
1 балл — Решение в виде текста/псевдокода с верными формулами или exe–файл
2-3 балла — Код с верной формулой расстояния, либо с верной формулой сдвига
4-5 баллов — Неверно считается расстояние, либо сдвиг ракеты на кадом шаге, и делается только одна из проверок близости. Или задача почти решена и при ответе «NO» программа зацикливается
6-7 баллов — Задача «почти решена»: неверно посчитано расстояние или производятся не все проверки на близость. Или задача решена верно, но при ответе «NO» программа зацикливается
8-9 баллов — Задача решена верно, но есть избыточные действия в коде, либо неверный формат ввода/вывода
10 баллов — Задача решена верно

9-10 класс. Задача 2

Решение: Мальчик сможет спастись от наказания. Выигрышных стратегий для мальчика здесь бесконечно много,в качестве решения достаточно привести любой подходящий и путь и доказать, что он подходит. Приведем некоторые примеры. Далее возьмем сторону квадрата за 1.

Вариант 1: Будем считать, что отец находится в сточке C. Тогда сын может сначала двигаться по диагонали, пока не пройдет половину ее длины до $S1$. Пока сын движется по диагонали отец обязан двигаться либо вверх потом влево, либо влево, потом вверх, без





ограничения общности считаем, что он движется вверх потом влево. Тогда путь мальчика $OS1 = \sqrt{2}/4$. За это время отец пройдет путь $3\sqrt{2}/4 > 1$, а значит окажется уже на стороне AB в точке $P1$. После этого сын проходит отрезок $S1S2$, учитывая, что отец находится на AB, ему выгоднее продолжать двигаться по ней влево и потом поворачивать вниз. Суммарный путь сына $\sqrt{2}/4 + 1/4$, путь отца $3\sqrt{2}/4 + 3/4 < 2,25$, значит сын успеет убежать.

Вариант 2: Пусть $AS = 1/4$, тогда сын пройдет путь $OS = \sqrt{5}/4$. Отцу оптимально двигаться вверх и налево, он за это время пройдет путь $3\sqrt{5}/4 < 1,75$.

Критерии проверки:
10 баллов — Верное решение
9 баллов — Верное решение с опечаткой/арифметической ошибкой, не влияющей на доказательство того, что путь подходит.
8 баллов — Верное решение с пробелами в обосновании того, что путь подходит
6 баллов— Верная модель для поиска подходящего пути, которую либо не удалось до конца исследовать, либо она была исследована неверно. Либо верный алгоритм построения пути, но без обоснования
4 балла — Предложен неверный алгоритм построения пути, в обосновании алгоритма содержатся неверные или недоказанные утверждения. Либо утверждается, что подходящего пути нет, но есть попытка (неверно) обосновать, почему это так.
3 балла — Рассматриваются частные случаи, показано, что они не подходят (или, ошибочно, что они подходят)
0 — Рассматриваются решения с нарушенными условиями задачи (отец начинает движение не из угла или ходит по воде)

9-10 класс. Задача 3

Решение. Заметим, что $2^12 = 4096 > 2 \cdot 1200 = 2400$ удовлетворяет условию. Если какое–то число n имеет простой делитель $p \geq 5$, то $n > 5 \cdot 1200 = 6000 > 4096$ и тогда не является наименьшим. Значит, минимальное n имеет своими простыми делителями только 2 и/или 3. Если 3 — не делитель, то $n = 4096$. Если 3 является делителем n, то $n > 3 \cdot 1200 = 3600$, так что остается рассмотреть числа от 3061 до 4095, кратные 3 с простыми делителями из множества $\{2, 3\}$. Небольшим перебором находим единственное такое число $3888 = 2^4 \cdot 3^5$.

Оно и является минимальным.
Ответ: 3888.

Критерии проверки:
5 баллов — найденное число удовлетворяет условию, но не является минимальным.
3 балла — есть попытки, но найденное число не удовлетворяет условию задачи.

9-10 класс. Задача 4

Решение. Звездная величина Веги составляет $0m$. Известно, что яркости звезд, отличающихся на m звездных величин, отличаются в $2,512^m$ раз. Для разницы на 6 звездных величин необходимо увеличить яркость кометы в $2,512^6 = 251,2$ раза. Так как яркость прямо пропорциональна массе, то и массу нужно увеличить примерно в 250 раз. Ответ: 250 кг натрия.

Критерии проверки:
3 балла — расчеты по неверным формулам.
6 баллов — в решении есть неверный переход.
9 баллов — арифметическая ошибка или не вполне верно указана звездная величина Веги.

9-10 класс. Задача 5

Решение. 1 способ. Данное выражение можно было получить, записав третий закон Кеплера

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM},$$

где T — период обращения по орбите, a — длина большой полуоси эллипса орбиты, G — гравитационная постоянная, M — масса планеты (в данном случае, Каллисто, $M = 1,075 \cdot 10^{23}$). При этом, формула верна для любых орбит с большой полуосью a. По условию, начальная высота над поверхностью планеты равна $h = 5 \cdot 10^3$ км. Рассмотрим орбиту, по которой будет двигаться аппарат — это отрезок (вырожденный эллипс). Поскольку центр планеты находится в фокусе эллипса орбиты, а у вырожденного эллипса фокусы совпадают с концами отрезка, то большая ось равна $a = (h+R)/2$, где $R = 2,4 \cdot 10^3$ км — радиус Каллисто. Нас интересует только половина периода обращения — время движения до центра планеты. Получаем $t = \frac{\pi(h+R)^{3/2}}{2\sqrt{2GM}} \approx 8350$ с. На самом деле, столкновение произойдет раньше (когда расстояние от спутника до центра Каллисто) составит R. К этому времени, однако, спутник будет иметь огромную скорость, так что время на остаток пути будет небольшим. Будем считать движение на остатке пути равномерным со скоростью V_0 на расстоянии $R/2$ до центра. По закону сохранения энергии

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{GMm}{h+R} = -\frac{GMm}{R/2} + \frac{mV^2}{2}.$$

По условию, $V_0 = 0$, откуда

$$V = \sqrt{\frac{4GM}{R} - \frac{2GM}{R+h}} = \approx 3164 \text{ м/с}.$$

Тогда поправочное время равно $\tau = R/V \approx 758$ с. Получаем, что время падения равно $t_0 = t - \tau \approx 7591$ с.

2 способ. Запишем Закон Сохранения тела для спутника

$$\frac{mV_0^2}{2} - \frac{GMm}{R+h} = -\frac{GMm}{r} + \frac{mV^2}{2}$$

для произвольного r. Домножим на $\frac{1}{m}$ и выразим V, учтя, что $V_0 = 0$:

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{R+h}}$$

Обозначим $R + h = b$. Так как $V = \frac{dr}{dt}$, то

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2GM}{r} - \frac{2GM}{b}}$$

Отсюда

$$\int\limits_0^{t_0} dt = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int\limits_R^b \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{b}}}$$

Находим неопределенные интегралы и получаем

$$t_0\sqrt{2GM} = \left(b^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{r}{b-r}} - \sqrt{br(b-r)}\right) \Big|_R^b = b^{3/2} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R}{b-R}}\right) + \sqrt{bR(b-R)})$$

Вспомним, что $b = R + h$ и окончательно получим

$$t_0 = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \left(\frac{\pi}{2}(R+h)^{3/2} - (R+h)^{3/2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{R}{h}} + \sqrt{hR(R+h)}\right) \approx 7618.$$

Ответ: 7618 с.

Критерии проверки:

9 баллов — верно применен закон Кеплера, не учтено, что падение не до центра планеты.
8 баллов — решено в грубом приближении.
6 баллов — ускорение считается постоянным, взято из закона всемирного тяготения на указанной высоте.
5 баллов – ускорение считается постоянным, взято из закона всемирного тяготения на указанной высоте, при этом не учтен радиус Каллисто.
4 балла — ускорение считается постоянным, взято на поверхности Каллисто.
3 балла — ускорение считается постоянным, взято на поверхности Юпитера или Земли.
2 балла — грубая ошибка в формуле.

9-10 класс. Задача 6

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(){
    int k, n, m, s;
    cin >> k >> n >> m >> s;
    if ( m == 1 )
    if ( s == k ) cout << ""YES"";
    else cout << ""NO"";
    else
    if ( (s > k) && ((s-k) % ((m-1)*n) == 0))  cout << ""YES"";
    else cout << ""NO"";
    return 0;
}
```

Критерии проверки

0 баллов — нет решения, или есть пример вычислений не оформленный в код

1 балл — решение в виде текста или exe–файл

2-3 балла — псевдокод с верной формулой

4-5 баллов — код с неверной формулой

6-7 баллов — задача решена верно, но есть ошибка в коде: не учтен вариант с $m == 1$. Либо программа входит в бесконечный цикл

8-9 баллов — задача решена верно, но не проверено $s >= k$, либо неверный формат ввода/вывода

10 баллов — задача решена верно

9-10 класс. Задача 7

Решение: Первый игрок задал число n. Чтобы выиграть, второму игроку нужно выбрать n различных чисел от 1 до $2n$ так, чтобы никакие два из них не давали в сумме число $2n+1$, тогда первый игрок не сможет составить выигрышную сумму. Разобьем числа на пары, дающий в сумме $2n+1$: $(1, 2n)$, $(2, 2n-1)$, …, $(n, n+1)$, таких пар n. Из каждой пары второму игроку нужно выбрать ровно одно число: если он из какой-то пары выберет два числа, то они в сумме дадут $2n+1$ и первый игрок выиграет, если же из какой-то пары он не выберет ни одно число, то поскольку ему нужно всего выбрать n чисел, то по принципу Дирихле из какой-то пары придется взять оба числа. Таким образом, выигрышных комбинаций столько, сколько способов выбрать по одному числу из каждой пары, то есть 2^n.

Ответ: 2^n

Критерии проверки:

10 баллов — Верное решение

7 баллов — Верно описано, как должна быть устроена выигрышная комбинация, есть

неверные попытки посчитать их количество
5 баллов — Предложены какие-то конкретные выигрышный комбинации, либо есть описание того, как должна быть устроена выигрышная комбинация, но нет подсчета количества
3 балла — Неверное понимание условия, подсчитано число пар, дающих в сумме $2n+1$, либо дополнение к ним.

9-10 класс. Задача 8

Сферическая планета радиуса R образована несжимаемой жидкостью плотности ρ. Каково давление P_1 на глубине $R/2$ от поверхности планеты? Каково давление P_2 в центре планеты? Учитывайте только действие гравитационной силы и считайте, что радиус планеты равен $R = 6,4 \cdot 10^6$ м, а $\rho = 103$ кг $\cdot$ м$^{-3}$. Приведите полное решение.

По закону Паскаля, давление небольшого по высоте столба воды равно $P = \rho g h$. Для больших h формула неверна, поскольку с изменением h меняется g. Для переменной $g = g(h)$ разобьем столб воды на слои, посчитаем давление каждого слоя как $\rho g(h_j)\Delta h$ и просуммируем — получим $P = \int_a^b \rho g(h)\,dh$ (по условию, жидкость несжимаема, т.е. $\rho = const$). Теперь выведем формулу для $g(h)$ на расстоянии h от центра планеты. Известно, что гравитационная сила внутри однородного шара определяется только шаром радиуса h (гравитационный эффект частиц шарового слоя $[h, R]$ взаимно уничтожается). Тогда

$$g(h) = \frac{GM(h)}{h^2} = \frac{G\rho V(h)}{h^2} = \frac{4\pi\rho G h^3}{3h^2} = \frac{4\pi\rho G}{3} \cdot h.$$

Чтобы узнать давление на глубине $R/2$, надо учесть столб воды для $h \in [R/2, R]$. Интегрируя от $R/2$ до R, получим

$$P = \rho \int_{R/2}^{R} \frac{4\pi\rho G}{3} h\,dh = \frac{4\pi\rho^2 G(R^2 - (R/2)^2)}{6} = \frac{\pi\rho^2 G R^2}{2}.$$

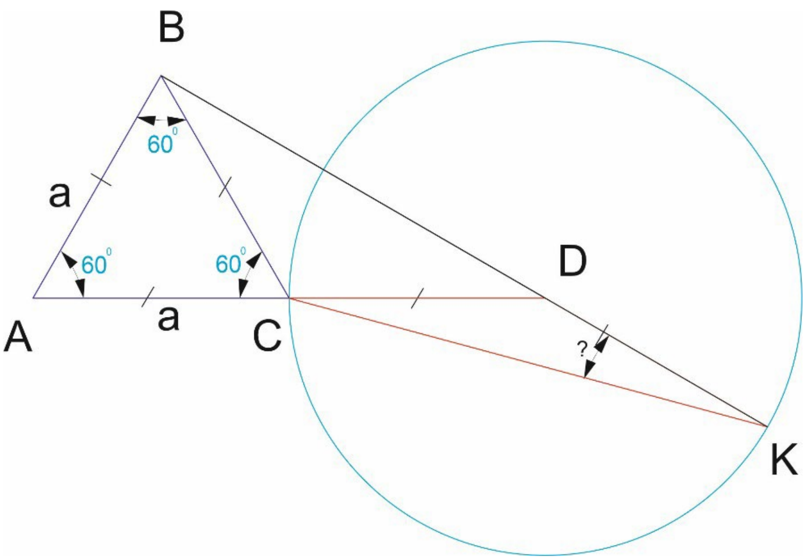
В центре планеты, аналогично, получим $P = \frac{2\pi\rho^2 G R^2}{3}$.

Критерии проверки

9 баллов — арифметическая ошибка.
7 баллов — неверные пределы интегрирования.
6 баллов — есть понимание о том, что g меняется, расчеты неверные.
4 балла — ускорение считается постоянным.
3 балла — ускорение считается постоянным и взято неверным.
2 балла — грубые ошибки в формулах.

7-8 класс. Задача 1

Решение. Точка D является центром окружности с $R = CD$, точка K принадлежит этой окружности. BK будет максимальным если DK принадлежит BK.
$\angle A = \angle ABC = \angle ACB = 60^o$, т.к. $\triangle ABC$ равносторонний.
$\angle BCD = 180^o - 60^o = 120^o$, т.к. $\angle BCD$ и $\angle ACB$ смежные.
$\angle BD = \angle BDC = (180^o - 120^o)/2 = 30^o$, т.к. $\triangle BCD$ равнобедренный по условию.
$\angle CDK = 180^o - 30^o = 150^o$, т.к. $\angle CDK$ и $\angle DKC$ смежные.
$\angle DCK = \angle DKC = (180^o - 150^o)/2 = 15^o$, т.к. $\triangle CDK$ равнобедренный по условию.
Ответ: 15^o



Критерии проверки

9 баллов – верно найден другой угол треугольника или ответ неверный вследствие арифметической ошибки.
5 баллов – получено неверное значение градусов из-за того, что учтены не все условия задачи.
3 балла – сделан вывод, что угол равен 0 или 180 градусов, так как расстояние максимально.
2 балла – есть только чертеж, ответ неверный.

7-8 класс. Задача 2

```
#include <iostream>
using namespace std;

int dig_root(int n){
    int sum;
    while (n > 9){
        sum = 0;
```

```
        while (n > 0){
            sum += n%10;
            n /= 10;
        }
        n = sum;
    }
    return n;
}

int dig_root2 (int n){
    if (n <= 9) return n;
    else return dig_root2(n%10 + n/10);
}

int main(){
    int n;
    cin >> n;
    cout << dig_root(n);
    return 0;
}
```

Критерии проверки
0 баллов — Нет решения, или есть пример вычислений не оформленный в код
1 балл — Решение в виде блок-схемы/текста/псевдокода, где нет способа выделения цифр числа, не учтено ограничение на N. Или неверная программа, решающая задачу не по условию
2-3 балла — Псевдокод без операций, выделяющих цифры числа, но с учетом ограничения на N
4-5 баллов — Псевдокод с операциями, выделяющими цифры числа
6-7 баллов — Задача решена в целом верно, но есть ошибка в коде
8-9 баллов — Задача решена верно, но есть избыточные действия в коде, либо неверный формат ввода/вывода
10 баллов — Задача решена верно

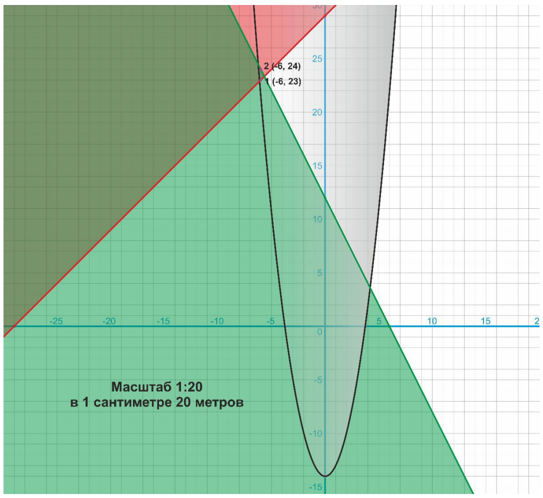
7-8 класс. Задача 3

Решение. Система неравенств:

$$y \geq x + 29 \tag{1}$$
$$x^2 \leq y + 14 \tag{2}$$
$$2x + y \leq 12 \tag{3}$$

Решаем данную систему графическим методом. Решением (1) и (3) является линейный график, а решением (2) парабола.

(1): $y = x+29$ для построения данной линейной функции определим 2 точки. $x_1 = 0$, тогда $y_1 = 29$. $x_2 = -29$, тогда $y_2 = 0$.
(3): $y = 12 - 2x$ для построения данной линейной функции определим 2 точки. $x_1 = 0$, тогда $y_1 = 12$, $x_2 = 6$, тогда $y_2 = 0$.
(2): $y = x^2 - 14$ — определим вершину параболы: $x_0 = 0$, $y_0 = -14$. Найдем нули функции: $x_{1,2} = \sqrt{14} = \pm 3,74$, добавим точки $x_3 = -6$, $y_3 = 22$; $x_4 = 6$, $y_4 = 22$. Построив графики получим, что общим решением для данной системы неравенств, является небольшая область в которой можно разместить только две свечи с целыми координатами $(-6; 23)$ и $(-6; 23)$.
Ответ: 2 свечи.



Критерии проверки

7 баллов – верный ответ найден графически, обоснования нет.
5 баллов – получены не все значения (или лишние) из-за того, что рассмотрены не все условия или вследствие арифметической ошибки.
3 балла – есть верный чертеж, никакие точки не выписаны.
2 балла – есть некоторые вычисления, нет верного чертежа и ответа.

7-8 класс. Задача 4

Решение. Устроим кодировку для каждого коктейля. Вначале пишем столько единиц, сколько хотим положить в коктейль яблок. Затем пишем ноль (это будет знак перехода к следующему фрукту). Запишем столько единиц, сколько хотим положить в коктейль груш. Затем снова ноль и, наконец, столько единиц, сколько хотим положить лимонов. Например, кодировка сбалансированного коктейля из 2 яблок, 2 груш и 2 лимонов: 11011011. Кодировка чисто яблочного коктейля: 11111100. Поскольку кодировка однозначна, то коктейлей столько же, сколько кодов. Каждый код получается так: среди восьми мест надо указать два, на которых будут стоять нули. Первое место — любое из 8, а второе — любое из 7 оставшихся. Итого, $8 \cdot 7 = 56$ вариантов. Кроме того, учтем, что результат не должен зависеть от порядка. Например, для сбалансированного коктейля надо указать места 3 и

6 или (что то же самое) 6 и 3. Значит, 56 вариантов надо разделить на 2 (убрать дублирующие варианты). Получаем 28 коктейлей.
Впрочем, можно и просто перечислить все коктейли.
Ответ: 28 коктейлей.

Критерии проверки

9 баллов — не учтены три варианта коктейля из одного ингредиента;
4 балла — перебирал, но нашел не все (но больше половины) или, наоборот, слегка больше;
2 балла — неверные формулы для вычислений или перебирал, но нашел совсем мало вариантов.

7-8 класс. Задача 5

Решение. Полярный радиус Земли — около 6356 км, экваториальный — 6378 км, максимально высокая точка поверхности около 9 км над уровнем моря (Джомолунгма), максимально низкая (бездна Челленджера в Марианской впадине) — около 11 км под уровнем моря. Полярный радиус Марса — 3376 км, экваториальный — 3396 км, максимально высокая точка над среднемарианским уровнем составляет около 21 км (вулкан Олимп), максимально низкая под среднемарсианским уровнем — около 7 км (равнина Эллада). Таким образом, максимальный перепад размеров Земли составляет около 20 км, а размеров Марса — около 30 км, при этом радиус Марса почти вдвое меньше. Следовательно, поверхность Земли ближе к идеальном шару, чем поверхность Марса, которая более «шероховата».

Критерии проверки

10 баллов — два довода в пользу Земли;
9 баллов — один довод и упомянуто, что есть еще кое-что;
8 баллов — один довод;
6 баллов — рассуждения в пользу Земли (она больше или с ошибкой цифры);
5 баллов — Земля больше (без рассуждений; неверные рассуждения, но свои);
4 балла — разность радиусов в пользу Марса;
3 балла — нечто разумное в пользу Марса;
2 балла — бессмысленное наукообразие (видимо, чат GPT).

7-8 класс. Задача 6

Решение. Пусть спутник вращается по орбите высоты h, т.е. на орбите радиуса $r = R+h$, где R — радиус Земли. Центростремительное ускорение равно $a = \frac{v^2}{r}$, а центростремительная сила $F = ma$. Приравниваем ее к силе тяготения $F = \frac{GMm}{r}$ и получаем $v = \sqrt{GM/(R+h)}$. Чтобы развить такую скорость надо затратить энергию $U = \frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{2(R+h)}$. Если брать орбиту нулевой высоты, то можно просто помнить, что первая космическая скорость равна $v = 7910$ м/с. Удельная теплота сгорания топлива дана $C = 50 \cdot 10^6$ Дж/кг. Тогда искомая масса топлива равна $\mu = \frac{U}{C} \approx 620$ кг. Если взять $h = 250$ км (самая низкая околоземная орбита), то надо дополнительно учесть потенциальную энергию, равную примерно mgh (изменение g на таких высотах можно не учитывать). Тогда $\mu = \frac{(GMm)/(2(R+h))+mgh}{C} \approx 660$ кг. На самом деле, масса существенно больше, поскольку топливо сгорает не мгновенно и в начале вывода нужно разгонять массу, равную $m+\mu$. Для учета этого эффекта можно использовать уравнение Циолковского $v = I \ln \frac{M_1}{M_2}$, где $M_1 = m + \mu + m_0$ — стартовая масса, а $M_2 = m + m_0$ — конечная масса. Здесь m_0 — масса конструкций ракеты–носителя (топливные баки, сам двигатель и т.д.), I — удельный импульс (величина силы, которую создает двигатель при расходе 1 кг топлива в секунду). Для примерного подсчета можно пренебречь дополнительной массой, взяв $m_0 = 0$. Далее, можно считать, что вся энергия сгорания топлива преобразуется в кинетическую энергию, т.е. при сгорании Δm массы топлива образуется энергия $C\Delta m$, равная $\Delta m I^2/2$. Тогда $I = \sqrt{2C} \approx 7000$ м/с (это значение завышено — для современных жидкостных двигателей I достигает 4600 м/с, не выше). Итак, $\frac{m+\mu}{m} = e^{v/I}$, откуда $\mu = m(e^{v/I} - 1) \approx 2m = 2000$ кг. Если взять реальный удельный импульс $I = 4600$, то $\mu \approx 4,33m = 4330$ кг. На самом деле, и это значение сильно занижено, поскольку мы не учитываем здесь гравитационные потери — работу силы тяжести, которая противоположна направлению движения ракеты, потери в энергии при преобразовании энергии сгорания топлива в механическую, аэродинамические потери и т.д. В реальности, наибольшую коррекцию дают гравитационные потери (их можно рассчитать, только знаю траекторию вывода космического аппарата на орбиту) — около трети энергозатрат. С учетом этой коррекции, получим $4330*(3/2) = 6500$ кг. Добавляя аэродинамические потери, затраты на маневрирование и т.п. получим реальную цифру около 8000 кг. **Ответ:** 660 кг при мгновенном разгоне; 2000 кг при разумном разгоне без учета силы тяготения; около 8000 кг в реальности.

Критерии проверки

10 баллов — подсчет по формуле Циолковского;
8 баллов — подсчет при мгновенном разгоне;
6 баллов — подсчет при мгновенном разгоне с пробелами или взяты известные цифры для произвольной существующей ракеты–носителя или формула Циолковского с произвольно взятым удельным импульсом или формула Циолковского с неполным объяснением;
4 балла — подсчет при мгновенном разгоне с многочисленными ошибками или взяты известные цифры для произвольной существующей ракеты–носителя, причем с ошибкой или формула типа Циолковского без объяснения и с ошибкой;
3 балла — подъем тела на высоту без разгона;
2 балла — то же, но с ошибкой или есть разумные рассуждения.

5–6 класс. Задача 1

Решение. Обозначим через V объем пробы, через V_1 объем первой части, через V_2 — объем второй части. Пусть x — объем метана в первой части, y — во второй. Тогда $\frac{x}{y} = \frac{V_1^2}{V_2^2}$. По условию x на 36 процентов меньше, чем y, т. е. $x = 0,64y$. Тогда $\frac{V_1}{v_2} = \sqrt{0,64} = 0,8$.
Ответ: $0,8$.

Критерии проверки
9 баллов — арифметическая ошибка.
6 баллов — ошибка при работе с процентами или не извлечен корень.
5 баллов — ошибка при работе с процентами, арифметические ошибки.
4 балла — ошибка при работе с процентами, не доведено до численного ответа.
2 балла — есть попытка, ответ неверный.

5–6 класс. Задача 2

Решение. Обозначим через v_1 скорость первой тени, через v_2 — скорость второй. Пусть $AC = x$, $BC = y$. Получаем систему уравнений $\begin{cases} tv_1 = x, \\ tv_2 = y, \\ 4v_1 = y, \\ 9v_2 = x, \end{cases}$ откуда $\begin{cases} tv_1 = 9v_2, \\ tv_2 = 4v_1 \end{cases}$. Перемножая полученные уравнения и сокращая на v_1v_2, получаем, что $t^2 = 36$. Значит, $t = 6$.
Ответ: 6 минут.

Критерии проверки
8 баллов — неверно понято условие.
4 балла — ошибки в соотношениях скоростей и времен.
3 балла — ответ угадан, решения нет.
2 балла — есть попытка, ответ неверный.

5–6 класс. Задача 3

Примем всю работу по выкапыванию котлована за X. Первый экскаватор может вырыть котлован за 36 дней. Тогда производительность за один день для первого экскаватора: Y1= X / 36; Два экскаватора могут вырыть котлован за 20 дней. Составим уравнение: 20 (X/36 + Y2) = X , где Y2 это производительность второго экскаватора. Упростим выражение и найдем Y2/20 Y2 = X - 5 / 9 X Y2 = X / 45 Так как первый экскаватор работал 24 дня, значит он выполнил работы 24X / 36 осталось выполнить 12 X / 36 = X / 3: Определим за сколько дней второй экскаватор закончил оставшуюся работу, для этого остаток работы разделим на производительность второго экскаватора : X/3 / X/45 = 15 дней. Котлован был вырыт за 24 + 15= 39 дней

Критерии проверки

2 балла — есть только зачатки решения или видно, что автор знает языки программирования, но задачу не сделал

4–6 баллов — решение начато, но не закончено, при этом, прослеживается логика или верный ответ без решения

8–9 баллов — почти доделано или сделано, но есть недочеты

10 баллов — верное решение.

5–6 класс. Задача 4

Решение. Пусть число n удовлетворяет условиям задачи. Тогда $n = 2l$, где $l \in \mathbb{N}$, и имеет ровно 5 различных делителей: $1, 2, k, l, n$, причем $2 < k < l < n$, $l = n/2$. Поскольку n делится на k, то число $\dfrac{n}{k} \in \mathbb{N}$ также является делителем n. Тогда оно должно совпадать с одним из пяти перечисленных выше. Если $\dfrac{n}{k} = 2$, то $k = \dfrac{n}{2} = l$, а это не так. Если $\dfrac{n}{k} = k$, то $n = k^2$. Поскольку n четное, то k тоже четное. Если $k = 2p$, где $p \neq 2$, то p — еще один делитель n, $2 < p < k$, но это невозможно по условию. Значит, $k = 4$, т. е. $n = 16$.

Другое решение. Воспользуемся формулой для количества делителей данного числа: если $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_j^{k_j}$, то количество N различных делителей числа n можно найти по формуле: $N = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_j + 1)$. У нас $n = 5$, следовательно, $j = 1$, $k_1 = 4$. Значит, $n = p^4$, где p — простое число. Но n четное, следовательно, $p = 2$, $n = 16$.

Ответ: одно число 16.

Критерии проверки

7 баллов — ответ верный, пробелы в обосновании.

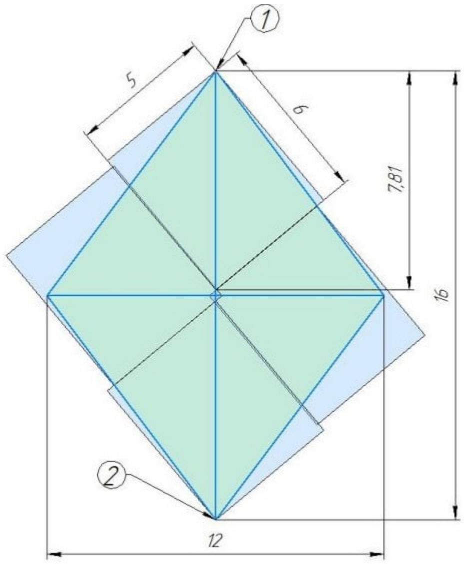
5 баллов — ответ верный, не обоснован.

4 балла — среди ответов есть верный.

2 балла — есть попытка, ответ неверный.

5–6 класс. Задача 5

Решение. Площадь ромба равна $\dfrac{1}{2} \cdot 12 \cdot 16 = 96$. Пложадь одного снимка равна$5 \cdot 6 = 30$. Поскольку $96 : 30 = 3,2$, то потребуется не менее 4 снимков. Приведем пример, показывающий, что четырех снимков достаточно. Совместим диагональ первого снимка с большей диагональю ромба и поместим угол снимка в вершину ромба. Так же поступим со вторым снимком (вершину выберем противоположную). Диагональ снимка равна $\sqrt{5^2 + 6^2} \approx 7.81$. Таким образом, в центре у нас образуется небольшой отрезок диагонали ромба, не покрытый первыми двумя снимками (длиной $16 - 2 * 7.81 = 0.38$). Закроем его третьим снимком, пристыковав снимок вплотную к первому и сдвинув (см. рисунок). Четвертый снимок пристыкуем ко второму симметрично третьему (центр будет тогда покрыт дважды).



Ответ: 4.

Критерии проверки

9 баллов — есть оценка, пример верный, нет строгого обоснования.
8 баллов — нет оценки, пример верный с идеей обоснования.
7 баллов — есть оценка, пример не обоснован.
6 баллов — нет оценки, есть пример без обоснования или обоснован не оптимальный пример.
5 баллов — есть только оценка (верная).
4 балла — оценка снизу с арифметической ошибкой.
3 балла — только ответ (верный).
2 балла — есть попытка, ответ неверный.

5–6 класс. Задача 6

Решение. Устроим кодировку для каждого коктейля. Вначале пишем столько единиц, сколько хотим положить в коктейль яблок. Затем пишем ноль (это будет знак перехода к следующему фрукту). Запишем столько единиц, сколько хотим положить в коктейль груш. Затем снова ноль и, наконец, столько единиц, сколько хотим положить лимонов. Например, кодировка сбалансированного коктейля из 2 яблок, 2 груш и 2 лимонов: 11011011. Кодировка чисто яблочного коктейля: 11111100. Поскольку кодировка однозначна, то коктейлей столько же, сколько кодов. Каждый код получается так: среди восьми мест надо указать два, на которых будут стоять нули. Первое место — любое из 8, а второе — любое из 7 оставшихся. Итого, $8 \cdot 7 = 56$ вариантов. Кроме того, учтем, что результат не должен зависеть от порядка. Например, для сбалансированного коктейля надо указать места 3 и 6 или (что то же самое) 6 и 3. Значит, 56 вариантов надо разделить на 2 (убрать дублирующие варианты). Получаем 28 коктейлей.
Впрочем, можно и просто перечислить все коктейли.
Ответ: 28 коктейлей.

Критерии проверки

10 баллов — верно перечислены или посчитаны все варианты

8 баллов — небольшое отклонение от верного ответа

5-6 баллов — ответ сильно отличается от верного, но некоторые варианты указаны. Например, игнорируется возможность не использовать один из фруктов.

3 балла — заведомо неверная, но интересная идея, например попытку посчитать через C_n^k (исключая C_8^2), либо как 3^6.

1 балл — разумная попытка что-то проанализировать или сосчитать.