Задание отборочного этапа Универсиады «Ломоносов» по математическим методам в экономике

Задача 1. Несколько фирм ловят рыбу в одном водоёме. Каждая фирма владеет одним рыболовецким катером и продаёт улов по 10 руб. за килограмм. При этом издержки на содержание катера составляют 1000 руб. в год. Количество рыбы, вылавливаемой каждым катером в год, зависит от числа катеров N и составляет $q = 500 - N$.

(а) Предположим, что количество фирм увеличивается до тех пор, пока прибыль каждой фирмы не станет равной нулю. Найдите совокупную добычу всех фирм при их максимальном количестве.

(б) Предположим, что государство национализировало добычу в этом водоеме. Сколько катеров будет использовать государство, чтобы получить максимальную совокупную прибыль от ловли рыбы всеми катерами? Чему будет равна добыча рыбы в целом и каждого катера в отдельности?

(в) В качестве альтернативы национализации рассмотрите выдачу годовых лицензий на один катер. Какова должна быть цена одной лицензии, чтобы в водоеме действовало общественно оптимальное количество рыболовецких катеров?

Задача 2: Центральный планировщик стремится максимизировать полезность домохозяйств $u(c) = \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta}$ при $0 < \theta \neq 1$, зависящую от потребления $c \geq 0$, за бесконечный промежуток времени $t \in [0, \infty)$, дисконтируя полезность с постоянной нормой $\rho > 0$. Таким образом, целевая функция планировщика имеет вид:

$$\int_0^\infty e^{-\rho\cdot t} u(c(t))dt.$$

В процессе производства потребительского блага $c(t)$ затрачиваются усилия по двум направлениям. Объем усилий $x(t) \geq 0$ идет на производство сырья, а объем $g(t) \geq 0$ – на поддержание темпа роста эффективности его переработки, так что:

$$c(t) = e^{\int_0^t g(s)\, ds} x(t).$$

Будем считать, что сумма усилий ограничена постоянной $w \geq 0$:

$$x(t) + g(t) \leq w.$$

(а) Предположим, что затраты x и g выбираются постоянными, при этом потребление увеличивается с постоянным темпом g, так что задача планировщика принимает вид:

$$\frac{x^{1-\theta}}{1-\theta}\int_0^{\infty} e^{\left((1-\theta)\cdot g-\rho\right)\cdot t}dt \to \max_{x,g\geq 0} \quad , \qquad x+g\leq w.$$

Найдите оптимальные уровни затрат усилий x и g, если $(1-\theta)\cdot w<\rho$.

(б) Что можно сказать об оптимальном решении если $(1-\theta)\cdot w\geq\rho$.

(в) Пусть затраты $x(t)$ и $g(t)$ можно выбирать переменными по времени, при этом задачу планировщика можно записать в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} e^{-\rho\cdot t}\frac{(\mathrm{c}(t))^{1-\theta}}{1-\theta}dt \to \max_{x(\cdot),g(\cdot)\geq 0} \quad , \quad c(t)=e^{\int_0^t g(s)\,ds}x(t), \;\; x(t)+g(t)=w.$$

Известно, что оптимальные траектории затрат $x(t)$ и $g(t)$ сходятся по времени к постоянным значениям, если $(1-\theta)\cdot w<\rho$. Как Вы думаете, каковы при этом будут пределы $x(t)$ и $g(t)$ при $t\to\infty$?