

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
Олимпиада школьников «Ломоносов» по математике
Заключительный этап 2021/22 учебного года для 11 класса

Задача 1. Какое из чисел больше:

$$A = \frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \dots + \frac{87}{(43 \cdot 44)^2} + \frac{89}{(44 \cdot 45)^2} \text{ или } B = \frac{\sqrt[6]{4 - 2\sqrt{3}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{3} + 1}}{\sqrt[3]{2}}?$$

Задача 2. Загадано 2021-значное натуральное число, любые две соседние цифры которого (расположенные в том же порядке) образуют двузначное число, делящееся или на 19, или на 23. Загаданное число начинается с цифры 1. Какой цифрой оно заканчивается?

Задача 3. Дана функция

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[9]{1 - x^9}}.$$

Вычислите

$$f(f(f(f(f(\dots f(2022)))))),$$

где функция f применяется 1305 раз.

Задача 4. Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 60° . Внутри этого конуса расположены 19 шаров радиуса 3, каждый из которых касается двух соседних шаров, боковой поверхности конуса и плоскости его основания. Найдите радиус основания конуса.

Задача 5. Если действительные числа a, b, c упорядочить по нестрогому возрастанию, получив тройку $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, то число x_2 будем называться средним из чисел a, b, c . Найдите все значения t , при каждом из которых среднее из трёх чисел

$$a = t^3 - 121t; \quad b = 2^t - 32; \quad c = \sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

положительно.

Задача 6. При каких значениях параметра $a \in \mathbb{R}$ наибольшее расстояние между корнями (не обязательно соседними) уравнения

$$a \operatorname{tg}^3 x + (1 - a - 2a^2) \operatorname{tg}^2 x + (2a^2 - 2a - 1) \operatorname{tg} x + 2a = 0,$$

принадлежащими интервалу $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$, принимает наименьшее значение? Найдите это наименьшее значение.

Задача 7. Высота BF остроугольного треугольника ABC пересекается с его другими высотами в точке P . Точка N лежит на отрезке AC так, что величина угла BNP максимальна. Найдите FN , если $AF = 7$, $FC = 2$.