

РАСПОЗНАВАНИЕ АВТОМАТОМ СВОЙСТВА ГРАФА БЫТЬ ГРАФОМ-КАКТУСОМ

Демидова Анна Андреевна

Аспирант

Механико-математический факультет МГУ имени М. В. Ломоносова,

Москва, Россия

E-mail: anna.dem98@mail.ru

Научный руководитель — Гасанов Эльяр Эльдарович

Графом-кактусом является связный граф, в котором любое ребро принадлежит не более чем одному циклу. Графы этого класса могут использоваться при иерархической декомпозиции геномов [2], в теории коммуникационных сетей [3] и в других областях.

Обозначим через \mathbf{G} класс всех связных планарных неориентированных простых графов.

В данной работе рассматривается автомат \mathcal{A}_c , осуществляющий обход графа из класса \mathbf{G} с целью определения того, является ли этот граф кактусом. Во время обхода автомат обладает частичной информацией о вершинах, которые он посещает, и инцидентных им рёбрах. По умолчанию автомат осуществляет обход по правилу левой руки, в результате чего ветвления, исходящие из вершин произвольного цикла, делятся на левые, обойдённые автоматом до обнаружения цикла, и правые, в которые до установления наличия цикла автомат ещё не заходил.

В распоряжении автомата есть 5 стираемых красок, а также серая краска, которой изначально были окрашены все рёбра графа. Чёрная краска служит для обнаружения циклов [1]; с помощью фиолетовой краски автомат может устанавливать, не имеют ли какие-то циклы графа общие рёбра; красная краска помимо роли, аналогичной фиолетовой, используется для определения условий окончания обхода графа-кактуса; синяя и голубая краски помогают определить направление дальнейшего движения после того, как обойдены правые ветвления очередного цикла. Автомат использует голубую краску, если необходимо перекрасить фиолетовое ребро, и синюю в остальных случаях. Красные рёбра не могут быть перекрашены в синий или голубой цвет.

Теорема 1. *Существует автомат \mathcal{A}_c с 6 красками, который сможет установить, является ли произвольный граф $g \in \mathbf{G}$ кактусом.*

Следует отметить, что при различных начальных направлениях обхода из одной и той же вершины автомат может обнаруживать в первую очередь разные циклы, однако, если у уже обнаруженного цикла есть общая цепочка рёбер с другим циклом графа, то она будет обнаружена в одном из правых ветвлений обнаруженного цикла (см. Рис. 1)

Автомат должен обойти правые ветвления обнаруженного цикла и вернуться в его первое левое ветвление. Перед исследованием правого ветвления автомат ставит «галочку» в соответствующей вершине цикла. Первая «галочка» формируется из последнего ребра цикла, покрашенного в чёрный цвет, и первого чёрного ребра справа. Первая «галочка» на первом цикле будет не фиолетового, а красного цвета. Это сделано для того, чтобы в будущем автомат мог завершить обход графа-кактуса. Кроме того, при постановке первой «галочки» очередного цикла в первом левом ветвлении этого цикла автомат будет ставить синее или голубое ребро, которое будет указывать направление движения после завершения обхода правых ветвлений цикла. В случае, если обход правых ветвлений очередного цикла завершён, а текущей вершине инцидентно несколько синих или голубых рёбер, автомат должен выбирать самое левое из них.

При обходе правых ветвлений автомат меняет направление движения по правилу левой руки на противоположное, и для остальных «галочек» в фиолетовый цвет перекрашивается первое чёрное ребро слева.

Есть 4 ситуации, в которых автомат должен устанавливать, что граф не является кактусом. Три из них связаны с моментом постановки первой «галочки» на очередном цикле: автомат может сразу установить, что граф не является кактусом; в вершине может не быть места для второго ребра «галочки», если первое не серое ребро справа является фиолетовым; автомат может поставить первую «галочку» и обнаружить, что на это цикле уже было фиолетовое ребро. Ещё одна ситуация заключается в том, что автомат может ошибочно установить, что очередная «галочка» является последней, если при постановке фиолетового ребра первое не серое ребро слева не является чёрным.

Автор выражает благодарность профессору Э. Э. Гасанову за постановку задачи.

Иллюстрации

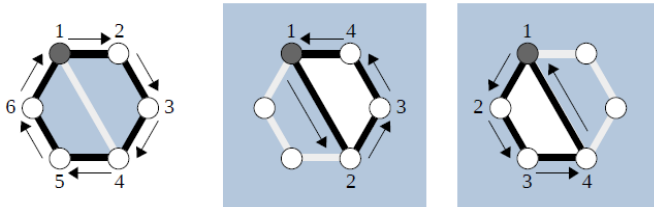


Рис. 1. Порядки обхода и грани, содержащие правые ветвления первых обнаруженных циклов, при различных начальных направлениях обхода

Литература

1. Демидова А. А. Автоматный анализ свойств графа быть деревом и псевдодеревом. Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2021. Т. 25, № 2. С.111–127.
2. Paten B. et al. Cactus graphs for genome comparisons. Journal of Computational Biology. 2011. Т. 18, № 3. С.469–481.
3. Zmazek B., Zerovnik J. Estimating the traffic on weighted cactus networks in linear time. Ninth International Conference on Information Visualisation (IV'05). 2005. С.536–541.