Секция «Геометрия и топология»

Вычисление расстояния Громова–Хаусдорфа при помощи ультраметрических пространств

Талипов Талант Камбарович
Студент (бакалавр)
Казахстанский филиал МГУ имени М.В.Ломоносова, Кафедра математики и информатики, Нур-Султан, Казахстан
E-mail: talipovtalant.live@gmail.com

1. Вступление

В работе изучается пространство всех метрических компактов, рассматриваемых с точностью до изометрии, наделенное метрикой Громова–Хаусдорфа. Заметим, что точные значения расстояния Громова–Хаусдорфа между конкретными метрическими пространствами известны лишь для малого числа случаев. Например, в работе [1] было вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа до 1-пространств — метрических пространств с одним ненулевым расстоянием. Также в работе [2] было вычислено расстояние Громова–Хаусдорфа между отрезком и окружностью. В работе [3] вычисляется расстояние Громова–Хаусдорфа между сферами разных размерностей, между вершинами правильных многоугольников и окружностью, а также между разными правильными многоугольниками, вписанными в одну окружность. Авторы ставят задачу вычисления последнего расстояния и приводят пример решения для m-угольника и $(m+1)$-угольника. В настоящей работе мы делаем некоторые продвижения в решении данной задачи. А именно, полностью исследован случай m- и n-угольников при условии, что m делится нацело на n, а также вычислены все расстояния до 2-угольников и 3-угольников. Также дано обобщение теорем о вычислении расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов с помощью понятия -спектра, доказанных в статье [?]. Автор выражает благодарность своему научному руководителю д. ф.-м. н. Тужилину Алексею Августиновичу и д. ф.-м. н. Иванову Александру Олеговичу за постановку задачи и помощь в работе.

2. Предварительные сведения

Пусть X — произвольное метрическое пространство. Расстояние между точками $x, y \in X$ будем обозначать $d(x,y)$ или $|xy|$. Для непустых $A, B \subset X$ определим

$$d_H(A,B) = \max\big\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B} d(a,b), \sup_{b\in B}\inf_{a\in A} d(a,b)\big\}.$$

Определение 2.1. Величина $d_H(A,B)$ называется **расстоянием Хаусдорфа** между A и B.

Пусть X и Y — метрические пространства. Тройку (X', Y', Z'), состоящую из метрического пространства Z' и двух его подмножеств X' и Y', изометричных соответственно X и Y, назовем *реализацией пары* (X,Y). Положим

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\big\{r : \exists (X', Y', Z'), d_H(X', Y') \leqslant r\big\}.$$

Определение 2.2. Величина $d_{GH}(X,Y)$ называется **расстоянием Громова–Хаусдорфа** между X и Y.

Определение 2.3. Для множеств X, Y **соответствием** между X и Y называется $R \subset X \times Y$ такое, что для любого $x \in X$ существует $y \in Y$, для которых $(x, y) \in R$ и, обратно, для любого $y \in Y$ существует $x \in X$, для которых $(x, y) \in R$. Если X, Y — метрические пространства, то определим **искажение соответствия** R следующим образом: $R = \sup\Big\{\big||x_1x_2| - |y_1y_2|\big| : (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R\Big\}$. Множество всех соответствий между X и Y будем обозначать $\mathcal{R}(X, Y)$.
Теорема 2.1 ([4]). Для произвольных метрических пространств X и Y выполняется

$$d_{GH}(X, Y) = \frac{1}{2}\inf\big\{R : R \in \mathcal{R}(X, Y)\big\}.$$

В работе [3] рассматривалось следующее преобразование метрики. Для метрического пространства (X, d_X) рассмотрим псевдометрическое пространство (X, u_X), где $u_X\colon X \times X \to \mathbb{R}_+$ определено следующим образом:

$$u_X\,(x, y) \mapsto \inf\big\{\max_{0\leqslant i\leqslant n-1} d_X(x_i, x_{i+1}) : x_0 = x, ..., x_n = y\big\}.$$

Метрическое пространство $\mathbf{U}(X)$ определим как факторпространство (X, u_X) по следующему отношению эквивалентности:

$$x \sim y \iff u_X(x, y) = 0.$$

Теорема 2.2. ([3]). Для любых метрических пространств X и Y выполняется следующее неравенство:

$$d_{GH}(X, Y) \geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(X), \mathbf{U}(Y)\big).$$

Определение 2.4. Метрическое пространство X будем называть **симплексом**, если все его ненулевые расстояния одинаковы. Симплекс мощности m, у которого все ненулевые расстояния равны $\lambda > 0$, будем обозначать $\lambda\Delta_m$.
Пусть X — произвольное метрическое пространство, m — кардинальное число, не превосходящее мощности X. Обозначим через $\mathcal{D}_m(X)$ семейство всевозможных разбиений пространства X на m непустых подмножеств. Пусть $A, B \subset X$ — произвольные непустые подмножества X, тогда положим

$$|AB| = \inf\big\{|ab| : a \in A, b \in B\big\}.$$

Для разбиения $D = \{X_i\}_{i\in I} \in \mathcal{D}_m(X)$ определим следующие величины:

$$D = \sup_{i\in I} X_i;$$

$$\alpha(D) = \inf\big\{|X_iX_j| : i \neq j\big\}.$$

Теорема 2.3. ([1]). Пусть X — произвольное ограниченное метрическое пространство и $m = \#\lambda\Delta \leqslant \#X$. Тогда

$$2d_{GH}(\lambda\Delta, X) = \inf_{D\in\mathcal{D}_m(X)} \max\big\{D, \lambda - \alpha(D), X - \lambda\big\}.$$

Пусть $G = (V, E)$ — произвольный (простой) граф с множеством вершин V и множеством ребер E. Если V – метрическое пространство, то определены длины $|e|$ ребер $e = vw$ графа G как расстояния $|vw|$ между концами v и w этих ребер, а также длина $|G|$ графа G как сумма длин всех его ребер.

Пусть X — конечное метрическое пространство. Определим число (X), положив его равным длине кратчайшего дерева среди деревьев вида (X, E). Полученная величина называется **длиной минимального остовного дерева на** X; дерево $G = (X, E)$, для которого $|G| = (X)$, называется **минимальным остовным деревом на** X. Заметим, что для любого X на нем всегда существует минимальное остовное дерево. Множество всех минимальных остовных деревьев на X обозначим через (X). Отметим, что минимальное остовное дерево, вообще говоря, определено неоднозначно. Для $G \in (X)$ через $\sigma(G)$ обозначим вектор длин ребер дерева G, упорядоченных по убыванию.

Предложение 2.1. ([5]). Для любых $G_1, G_2 \in (X)$ имеем $\sigma(G_1) = \sigma(G_2)$.

Определение 2.5. Для любого конечного метрического пространства X через $\sigma(X)$ обозначим вектор $\sigma(G)$ для произвольного $G \in (X)$ и назовем этот вектор **-спектром пространства** X.

Теорема 2.4 ([5]). Пусть X — конечное метрическое пространство, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ — -спектр пространства X. Если число $b \geqslant 2X$, то $d_{GH}(X, b\Delta_{k+1}) = \frac{b-\lambda_k}{2}$ для любого натурального $k \leqslant n$.

3. Основные результаты

Для каждого натурального $n \geqslant 2$ обозначим через P_n множество вершин правильного n-угольника, вписанного в единичную окружность S^1. Отметим, что P_2 — пара диаметрально противоположных точек. Наделим множества P_n метрикой, индуцированный с окружности. Для $m, n \geqslant 2$ положим $p_{m,n} = d_{GH}(P_m, P_n)$.

Предложение 3.1. ([3]). Для любого $m \geqslant 2$ выполняется

$$d_{GH}(S^1, P_m) = \frac{\pi}{m};$$

$$d_{GH}(P_m, P_{m+1}) = \frac{\pi}{m+1}.$$

Перейдем к основным результатам работы.

Лемма 3.1. Пусть $n \geqslant 2$, $p \in \mathbb{N}$. Тогда для любых $i, j = 1, 2, ..., n$ и $k, l = 0, 1, ..., p-1$ выполняется

$$\Big|\min\big(|i-j|, n-|i-j|\big) - \min\Big(\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|, n-\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|\Big)\Big| \leqslant \frac{|k-l|}{p}.$$

Доказательство. Положим $S = \Big|\min\big(|i-j|, n-|i-j|\big) - \min\Big(\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|, n-\Big|i-j+\frac{k-l}{p}\Big|\Big)\Big|$. Заметим, что так как $\frac{|k-l|}{p} < 1$, то

$$|i-j+\frac{k-l}{p}| = \begin{cases} i-j+\frac{k-l}{p}, & \text{если } i-j > 0; \\ \frac{|k-l|}{p}, & \text{если } i-j = 0; \\ j-i+\frac{l-k}{p}, & \text{если } i-j < 0. \end{cases}$$

Если $i - j = 0$, то

$$S = \Big|\min\big(0, n\big) - \min\big(\frac{|k-l|}{p}, n - \frac{|k-l|}{p}\big)\Big| = \frac{|k-l|}{p}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что $i - j > 0$. Рассмотрим отдельно несколько случаев.

1) Предположим, что $i - j < \frac{n}{2}$. Если $i - j + \frac{k-l}{p} > \frac{n}{2}$, то $i - j = \frac{n-1}{2}$ и $\frac{k-l}{p} > \frac{1}{2}$. В таком случае

$$S=\Big|\frac{n-1}{2}-\big(n-(\frac{n-1}{2}+\frac{k-l}{p})\big)\Big|=\Big|\frac{k-l}{p}-1\Big|<\frac{|k-l|}{p},$$

где последнее неравенство верно в силу того, что $\frac{k-l}{p}>\frac{1}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}\leqslant\frac{n}{2}$, то

$$S=\Big|i-j-\big(i-j+\frac{k-l}{p}\big)\Big|=\frac{|k-l|}{p}.$$

2) Предположим, что $i-j=\frac{n}{2}$. Тогда

$$S=\Big|\frac{n}{2}-\min\big(\frac{n}{2}+\frac{k-l}{p},\frac{n}{2}+\frac{l-k}{p}\big)\Big|=\frac{|k-l|}{p}.$$

3) Предположим, что $i-j>\frac{n}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}<\frac{n}{2}$, то $i-j=\frac{n+1}{2}$ и $\frac{l-k}{p}>\frac{1}{2}$. В таком случае

$$S=\Big|\frac{n-1}{2}-(\frac{n+1}{2}+\frac{k-l}{p})\Big|=\Big|\frac{l-k}{p}-1\Big|<\frac{|k-l|}{p},$$

где последнее неравенство верно в силу того, что $\frac{l-k}{p}>\frac{1}{2}$. Если $i-j+\frac{k-l}{p}\geqslant\frac{n}{2}$, то

$$S=\Big|n-i+j-\big(n-i+j-\frac{k-l}{p}\big)\Big|=\frac{|k-l|}{p}.$$

Лемма доказана.
Теорема 3.1. Пусть $2\leqslant n\leqslant m$ и m делится на n без остатка, тогда

$$p_{n,m}=\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{m}.$$

Доказательство. Пусть $u_1,...,u_n$ — вершины P_n, а $v_1,...,v_m$ — вершины P_m.
Докажем, что $p_{n,m}\geqslant\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{m}$. По теореме 2.2,

$$p_{n,m}\geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(P_m),\mathbf{U}(P_n)\big).$$

Заметим, что $\mathbf{U}(P_m),\mathbf{U}(P_n)$ — симплексы мощности m и n с попарными ненулевыми расстояниями $\frac{2\pi}{m}$ и $\frac{2\pi}{n}$ соответственно. Тогда по теореме 2.3,

$$p_{n,m}\geqslant d_{GH}\big(\mathbf{U}(P_m),\mathbf{U}(P_n)\big)=\frac{1}{2}\max\Big\{\frac{2\pi}{m},\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{m}\Big\}\geqslant\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{m}.$$

Докажем теперь оценку сверху. Пусть $m=pn$, где $p\in\mathbb{N}$. Тогда $\frac{\pi}{n}-\frac{\pi}{m}=\frac{(p-1)\pi}{pn}$. Построим соответствие $R\in\mathcal{R}(P_n,P_m)$ такое, что $R\leqslant\frac{2(p-1)\pi}{pn}$:

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}\big\{(u_i,v_{pi-k}):k=0,1,...,p-1)\big\}.$$

Тогда по лемме 3.1 для любых $i,j=1,2,...,n$ и $k,l=0,1,...,p-1$ выполняется

$$\big|d(u_i,u_j)-d(v_{pi-l},v_{pj-k})\big|=\Big|\frac{2\pi}{n}\min\big(|i-j|,n-|i-j|\big)-\frac{2\pi}{pn}\min\big(|pi-pj+k-l|,pn-|pi-pj+k-l|\big)\Big|\leqslant\frac{2\pi|k-l|}{pn}\leqslant\frac{2(p-1)\pi}{pn}.$$

Таким образом, $R\leqslant\frac{2(p-1)\pi}{pn}$, и это завершает доказательство.
Теорема 3.2. Пусть $m\geqslant 2$, тогда

$$p_{2,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}, & \text{если } m \text{ — нечетное;} \\ \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Доказательство. Случай четного m напрямую следует из теоремы 3.1. Пусть теперь m — нечетное число. Пусть u_1, u_2 — вершины P_2, а $v_1, ..., v_m$ — вершины P_m. Заметим, что P_2 — симплекс мощности 2 со стороной длины π, то есть $P_2 = \pi\Delta_2$. Тогда по теореме 2.3,

$$d_{GH}(P_2, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_2} \max\bigl\{D, \pi - \alpha(D), P_m - \pi\bigr\},$$

где $\mathcal{D}_2$ — множество разбиений P_m на 2 непустых подмножества. В нашем случае $\alpha(D) = \frac{2\pi}{m}$ и $P_m = \pi - \frac{\pi}{2m}$. Поэтому

$$d_{GH}(P_2, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_2} \max\{D, \pi - \frac{\pi}{2m}\}.$$

Покажем, что для любого $D \in \mathcal{D}_2$ будет выполняться неравенство

$$D \geqslant \pi - \frac{\pi}{2m}.$$

Предположим, что для разбиения $D = \{X_1, X_2\}$ верно обратное, то есть $d = D < \pi - \frac{\pi}{2m}$. Не ограничивая общности, можем считать, что $X_1 = d$. Тогда найдутся вершины $v_i, v_j \in P_m$ такие, что $v_i, v_j \in X_1$ и $d(v_i, v_j) = d$. Рассмотрим вершины $v_k, v_l \in P_m$, соседние с v_i и v_j соответственно и не лежащие внутри меньшей дуги окружности S^1, соединяющей v_i с v_j. Вершина v_k не может принадлежать множеству разбиения X_1, так как иначе

$$d = X_1 \geqslant d(v_k, v_j) = d(v_i, v_j) + \frac{2\pi}{m} = d + \frac{2\pi}{m} > d.$$

Аналогично, $v_l \in X_2$. Тогда

$$d = D \geqslant X_2 \geqslant d(v_k, v_l) \geqslant d(v_i, v_j) + \frac{2\pi}{m} = d + \frac{2\pi}{m} > d.$$

Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3.3. Пусть $m \geqslant 3$, а r — остаток от деления m на 3, тогда

$$p_{3,m} = \begin{cases} \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{m}, & \text{если } r = 0; \\ \frac{\pi}{3} - \frac{r\pi}{3m}, & \text{если } r \neq 0. \end{cases}$$

Доказательство. Случай $r = 0$ напрямую следует из теоремы 3.1. Пусть теперь $r > 0$. Заметим, что P_3 — симплекс мощности 3 со стороной длины $\frac{2\pi}{3}$, то есть $P_3 = \frac{2\pi}{3}\Delta_3$. Тогда по теореме 2.3,

$$d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_3} \max\bigl\{D, \frac{2\pi}{3} - \alpha(D), P_m - \frac{2\pi}{3}\bigr\},$$

где $\mathcal{D}_3$ — множество разбиений P_m на 3 непустых подмножества. В нашем случае $\alpha(D) = \frac{2\pi}{m}$ и $P_m \leqslant \pi$. Из предложения 3.1 следует, что $p_{3,4} = \frac{\pi}{4}$. Теперь будем считать, что $m \geqslant 5$. Поэтому

$$d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{1}{2} \inf_{D \in \mathcal{D}_3} \max\{D, \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{m}\}.$$

Положим $q = [\frac{m}{3}]$. Пусть $r = 1$. Рассмотрим следующее разбиение $D = \{X_1, X_2, X_3\}$:

$$X_1 = \{v_1, v_2, ..., v_q\};$$

$$X_2 = \{v_{q+1}, v_{q+2}, ..., v_{2q}\};$$

$$X_3 = \{v_{2q+1}, v_{2q+2}, ..., v_m\}.$$

Тогда $D = (\frac{m-1}{3})\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}$. Покажем, что для любого $D \in \mathcal{D}_3$ будет выполняться неравенство

$$D \geqslant \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}.$$

Предположим, что для разбиения $D = \{X_1, X_2, X_3\}$ верно обратное, то есть $d = D < \frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}$. Не ограничивая общности, будем считать, что множество X_1 содержит больше одной точки. Тогда найдутся вершины $v_i, v_j \in P_m$ такие, что $v_i, v_j \in X_1$ и $d(v_i, v_j) = X_1$. Покажем, что всякая вершина $v_k \in X_1$ обязана лежать внутри меньшей дуги окружности S^1, соединяющей v_i, v_j. Предположим, что $v_k \in X_1$ лежит вне этой дуги. Тогда окружность разбивается на 3 дуги v_iv_j, v_jv_k, v_kv_i. Длина каждой из них должна быть не больше $X_1 \leqslant d$. Тогда

$$2\pi = d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) + d(v_k, v_i) \leqslant 3d < 2\pi - \frac{2\pi}{m} < 2\pi.$$

Таким образом, каждое из множеств X_1, X_2 и X_3 представляет собой множество подряд идущих вершин P_m диаметра не больше $\frac{2\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m} - \frac{2\pi}{m}$. Тогда

$$2\pi - \frac{6\pi}{m} = X_1 + X_2 + X_3 \leqslant 2\pi - \frac{6\pi}{m} - \frac{2\pi}{m} < 2\pi - \frac{6\pi}{m}.$$

Значит, $d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3m}$. Пусть $r = 2$. Рассмотрим следующее разбиение $D = \{X_1, X_2, X_3\}$:

$$X_1 = \{v_1, v_2, ..., v_q\};$$

$$X_2 = \{v_{q+1}, v_{q+2}, ..., v_{2q+1}\};$$

$$X_3 = \{v_{2q+2}, v_{2[\frac{m}{3}]+2}, ..., v_m\}.$$

Тогда $D = (\frac{m-2}{3})\frac{2\pi}{m} = \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3m}$. Повторяя рассуждения для случая $r = 1$, получим, что для любого $D \in \mathcal{D}_3$ будет выполняться неравенство

$$D \geqslant \frac{2\pi}{3} - \frac{4\pi}{3m}.$$

Значит, $d_{GH}(P_3, P_m) = \frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3m}$. Теорема доказана.
Теорема 3.4. Пусть X — конечное метрическое пространство, $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ — -спектр пространства X такой, что $\lambda_i = a$ для любого i и некоторого положительного числа a. Если число $b \geqslant X + a$, то $d_{GH}(X, b\Delta_k) = \frac{b-a}{2}$ для любого натурального числа $k < n + 1$.
Доказательство. Заметим, что $2a \leqslant X + a \leqslant b$. Так как $\lambda_i = a$ для любого i, то по определению -спектра и пространства $\mathbf{U}(X)$ получаем, что

$$\mathbf{U}(X) = a\Delta_{n+1}.$$

По теореме 2.2,

$$d_{GH}(X, b\Delta_k) \geqslant d_{GH}(a\Delta_{n+1}, b\Delta_k) = \frac{1}{2}\max(a, b - a) = \frac{b-a}{2},$$

так как $b \geqslant 2a$.
Пусть $x_1, ..., x_{n+1}$ — элементы X, а $y_1, ..., y_k$ — элементы $b\Delta_k$. Рассмотрим следующее соответствие $R \in \mathcal{R}(X, b\Delta_k)$:

$$R=\bigcup_{i=1}^{k-1}\big\{(x_i,y_i)\big\}\cup\bigcup_{i=k}^{n+1}\big\{(x_i,y_k)\big\}.$$

Тогда

$$R=\max\Big\{\max\big\{b-d(x_i,x_j):1\leqslant i\leqslant k-1,\ i<j\leqslant n+1\big\},$$
$$\max\big\{d(x_i,x_j):k\leqslant i<j\leqslant n+1\big\}\Big\}\leqslant\max\Big\{b-a,X\Big\}=b-a,$$

так как $b-a\geqslant X$. Значит, $d_{GH}(X,b\Delta_k)=\frac{b-a}{2}$.

Теорема 3.5. Пусть X — конечное метрическое пространство, $\lambda=(\lambda_1,...,\lambda_n)$ — -спектр пространства X такой, что $\lambda_i=a$ для любого i и некоторого положительного числа a. Если число $b\geqslant X$, то $d_{GH}(X,b\Delta_{n+1})=\frac{b-a}{2}$ и $d_{GH}(X,b\Delta_k)=\frac{b}{2}$ для любого натурального числа $k>n+1$. **Доказательство.** Аналогично предыдущей теореме получаем, что

$$\mathbf{U}(X)=a\Delta_{n+1}.$$

По теореме 2.2,

$$d_{GH}(X,b\Delta_{n+1})\geqslant d_{GH}(a\Delta_{n+1},b\Delta_{n+1})=\frac{b-a}{2}.$$

Рассмотрим произвольное биективное соответствие $R\in\mathcal{R}(X,b\Delta_{n+1})$. Тогда

$$R=\sup_i|b-d_i|=b-a,$$

где d_i — расстояния в пространстве X. Последнее неравенство верно, так как $d_i\geqslant a$ для любого i. Таким образом, первая формула из утверждения теоремы доказана. Докажем теперь вторую формулу.

По теореме 2.2,

$$d_{GH}(X,b\Delta_k)\geqslant d_{GH}(a\Delta_{n+1},b\Delta_k)=\frac{1}{2}\max(b,b-a)=\frac{b}{2}.$$

Пусть $x_1,...,x_{n+1}$ — элементы X, а $y_1,...,y_k$ — элементы $b\Delta_k$. Рассмотрим следующее соответствие $R\in\mathcal{R}(X,b\Delta_k)$:

$$R=\bigcup_{i=1}^{n}\big\{(x_i,y_i)\big\}\cup\bigcup_{i=n+1}^{k}\big\{(x_{n+1},y_i)\big\}.$$

Так как $d_i\leqslant b$ для любого i, то

$$R=b.$$

Значит, $d_{GH}(X,b\Delta_k)=\frac{b}{2}$.

Замечание 3.1. Заметим, что теорема 3.4 и теорема 3.5 обобщают теорему 2.4. А именно: теорема 3.4 позволяет вычислять расстояние Громова–Хаусдорфа до симплексов с малым числом точек и диаметром меньшим, чем в теореме 2.4, а теорема 3.5 позволяет вычислять расстояние Громова–Хаусдорфа до симплексов со сколь угодно большим числом точек.

Теорема 3.6. Пусть X и Y — ограниченные метрические пространства, X — линейно связное пространство, $X=Y=\mathbf{U}(X)=d$. Тогда $d_{GH}(X,Y)=\frac{1}{2}d$. **Доказательство.** Так как X линейно связно, то $\mathbf{U}(X)$ — одноточечное метрическое пространство. По теореме 2.2,

$$d_{GH}\big(\mathbf{U}(X),\mathbf{U}(Y)\big)=\frac{1}{2}\mathbf{U}(Y)=\frac{1}{2}d\leqslant d_{GH}(X,Y).$$

С другой стороны,

$$d_{GH}(X,Y) \leqslant \frac{1}{2}\max(X,Y) = \frac{1}{2}d.$$

Значит, $d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}d$.

Источники и литература

1) Григорьев Д. С., Иванов А. О., Тужилин А. А. *Расстояния Громова–Хаусдорфа до симплексов.* Чебышевский сб., 20:2 (2019), 108-122.
2) Yibo Ji, Alexey A. Tuzhilin, *Gromov—Hausdorff Distance Between Segment and Circle.* ArXiv e-prints, arXiv:2101.05762, 2021.
3) Sunhyuk Lim, Facundo Memoli, Zane Smith, *The Gromov–Hausdorff distance between spheres.* ArXiv e-prints, arXiv:2105.00611v5, 2022.
4) Бураго Д.Ю., Бураго Ю.Д., Иванов С.В. *Курс метрической геометрии.* Москва–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2004.
5) Tuzhilin A.A. *Calculation of Minimum Spanning Tree Edges Lengths using Gromov-Hausdorff Distance.* ArXiv e-prints, arXiv:1605.01566, 2018.