

Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Исследование и анализ одной математической модели "лес-биомасса"

Научный руководитель – Асташова Ирина Викторовна

Тусупбекова Эльмира Ерсыновна

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: elmira.tussupbekova@gmail.com

В данной работе проводится исследование и анализ динамической модели для сохранения лесного хозяйства, которое истощается из-за вырубки лесов, роста лесной промышленности, климатических факторов. Рассматривается возрастная структура лесной биомассы через деление на молодые (P) и зрелые (M) популяции. Для промышленных предприятий (I) накладывается ограничение на вырубку молодых популяций. В качестве альтернативных ресурсов для промышленных предприятий вводится модифицированная функция Лесли–Гоуэра. В работе изучается система нелинейных дифференциальных уравнений, исследуется устойчивость решений системы, допускающей линеаризацию в окрестности положений равновесия. Взаимодействие между величинами P, M, I описывается динамической системой:

$$\frac{dP}{dt} = rP \left(1 - \frac{P}{k}\right) - \beta P + \gamma P, \quad (1)$$

$$\frac{dM}{dt} = \beta P - q_1 EM - d_1 M, \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_2 I}{\alpha_3 + M}\right) I - d_2 I, \quad (3)$$

где $P(0) \geq 0, M(0) \geq 0, I(0) \geq 0$, а $r, \beta, k, \gamma, q_1, E, d_1, d_2, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - действительные параметры. Для доказательства положительности и ограниченности решений системы используется Лемма Чена. Теория дифференциальных неравенств используется для получения достаточных условий существования предельных значений введенных переменных. Исследуется устойчивость положения равновесия системы. Рассматриваются четыре биологически возможных положения равновесия системы. Строятся фазовые портреты в проекции по двум переменным при помощи веб-приложения PhaPI [2]. В ходе работы были выявлены условия при которых положения равновесия представляли собой устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый седло–узел, неустойчивый седло–узел. В результате анализа изучаемой модели были определены условия положительности, ограниченности системы. Было изображено поле направлений динамической системы и фазовые портреты в проекции по двум переменным. В ходе работы были выявлены условия при которых положения равновесия представляли собой устойчивый узел, неустойчивый узел, устойчивый седло–узел, неустойчивый седло–узел.

Из анализа литературы мы можем утверждать, что основные предположения модели Лесли применимы для нашей системы уравнений. Были получены условия достижения биоэкономического равновесия. В результате численного моделирования были построены графики, соответствующие полученным в работе результатам. В ходе работы было проанализировано каждое уравнение системы по отдельности.

Источники и литература

- 1) 1. Асташова И.В. Применение динамических систем к исследованию асимптотических свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений высоких порядков / И.В. Асташова // Современная математика и ее приложения, 2003. — Т. 8, 3—33с. 2. Черепанов А.А. Программный комплекс PhaPl для автоматического построения и исследования фазовых портретов на плоскости / А.А. Черепанов // Открытое образование, 2017. — 41 — 52с. 3. Chen F. On a nonlinear nonautonomous predator - prey model with diffusion and distributed delay / F. Chen // Comput Appl Math, 2014. — 33 — 49p. 4. Leslie P.H. Some further notes on the use of matrices in population mathematics / P.H. Leslie // Oxford University Press, 1948. — 213 — 245p. 5. Manisha C., Joydip D., Om P. M. A mathematical model for the conservation of forestry biomass with an alternative resource for industrialization: a modified Leslie Gower interaction / C. Manisha , D. Joydip , P.M. Om // Springer International Publishing Switzerland, 2015. — 1—10p.