Секция «Логика»

Доказательство и его роль в современных основаниях математики.

Научный руководитель – Шехтман Валентин Борисович

Копнев Кирилл Михайлович
Студент (бакалавр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: kmkopnev@mail.ru

Доказательство со времен Евклида является важнейшим математическим достижением. В своей лекции [3] Ян Хакинг утверждает, что Декартом и Лейбницем были сформулированы две концепции понимания доказательства, актуальные до сих пор.

Декарт считает, что роль доказательства заключается в убеждении человека в истинности определенного математического утверждения. По мнению Декарта, хотя доказательство утверждения и гарантирует его истинность, не всякое утверждение истинно в силу наличия доказательства. В [2] Декарт вводит различие между интуицией и дедукцией, проясняя этим, почему истинность не зависит от доказательства. Интуицией Декарт называет понимание ясного и внимательного ума, настолько отчетливое, что не остается никакого сомнения в отношении того, что мы разумеем. Дедукция Декартом понимается как способ познания, посредством которого мы постигаем все то, что с необходимостью выводится из других достоверно известных вещей.

Понимание доказательства Лейбницем подобно определению доказательства в исчислениях Гильберта, где доказательство определяется как конечная последовательность предложений, каждое из которых есть либо аксиома, либо выводится из предыдущих членов последовательности применением одного из правил вывода. Подобный взгляд на доказательство требует проверки каждого шага, чтобы убедиться в обоснованности доказательства в целом. Кроме того, сама возможность доказательства становится для Лейбница достаточным основанием для того, чтобы признать утверждение необходимо истинным [3].

Идеи обоих философов нашли отражение в математических проектах Александра Гротендика и Владимира Воеводского.

Александр Гротендик является наследником картезианского понимания доказательства. В своей работе [1] он пишет: «понимание, приходящее шаг за шагом, всегда предшествует доказательству. Подсказывая методы доказательства, оно в то же время придает ему смысл». Понимание еще не сформулированной явно проблемы, приходящее к математику, определяет, сможет ли математик построить доказательство. Основываясь на этой идее, Гротендик внес существенные изменения в основания алгебраической геометрии, прояснив корректную технику работы в этой области. Для Гротендика математическое творение является «раскрытием очевидной вещи», которая принимает форму в «очевидном утверждении» [4]. Таким образом, для Гротендика понимание играет более важную роль, нежели само доказательство.

Владимир Воеводский, напротив, являлся представителем идей Лейбница в отношении доказательства. В своей лекции в 2014 году в Институте Перспективных Исследований, он отметил недостатки системы Цермелло-Френкеля с аксиомой выбора, которая долгое время была главным претендентом на роль оснований математики: «Первые проблемы системы ZFC можно увидеть в конце деятельности великого проекта ранних Бурбаки, поскольку $<\ldots>$ теория категорий не могла быть описана в терминах ZFC» [6]. В своей работе [5] он утверждает, что «наиболее интересные и важные направления современной математики связаны с переходом в новую эру, для которой будет характерно широкое использование автоматизированных инструментов для создания и проверки доказательств». Опираясь на эту идею, Воеводским была предложена программа по изменению оснований математики, которая включала в себя в качестве составляющих гомотопическую теорию типов, а также систему Coq, реализующую автоматические доказательства теорем. Таким образом, доказательство и его верификация стали для Владимира Воеводского главными критерием, в соответствии с которыми требуется построить новые основания математики, поскольку большая часть работы математика заключается в создании доказательств.

Вопрос, который в связи со всем вышесказанным представляется интересным изучить, заключается в том, возможно ли объединить представленные выше две концепции доказательства? Важно заметить, что оба «идеальных» типа, при всей своей противоположности не противоречат друг другу. При более тщательном анализе выясняется, что они дополняют друг друга, что и будет показано в докладе.

Источники и литература

1 Гротендик А., Урожаи и посевы, Самодовольство и обновление, с. 28. (https://mccme.ru/free-books/grothendieck/f2.pdf)

2 Декарт Р., Сочинения в 2-х томах: т. 1, М.: Мысль, с.84

3 Хакинг Ян, Почему вообще существует философия математики? М.: издательство Канон-плюс, 2020, с. 49.

4 Grothendieck A., Recoltes et Semailles, c. 368 (https://www.quarante-deux.org/archives/klein/prefaces/Romans_1965-1969/Recoltes_et_semailles.pdf)

5 Voevodsky V., Univalent Foundations Project, c. 1, 2010 (https://www.math.ias.edu/~vladimir/Site3/Univalent_Foundations_files/univalent_foundations_project.pdf).

6 Voevodsky V., Univalent Foundations: New Foundations of Mathematics, 2014 (https://www.ias.edu/ideas/2014/voevodsky-foundations-video)