Секция «Теоретическая механика и мехатроника»

Задача о брахистохроне с фазовыми ограничениями

Научный руководитель – Черкасов Олег Юрьевич

Смирнова Нина Владимировна
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет космических исследований, Москва, Россия
E-mail: nina.smirnova247@yandex.ru

Рассматривается движение материальной точки в вертикальной плоскости под действием сил тяжести и вязкого линейного трения. В качестве управления рассматривается скорость изменения угла наклона траектории. Задача состоит в максимизации горизонтальной дальности за заданное время или в минимизации времени перехода на заданное расстояние по горизонтали. Предполагается, что имеются фазовые ограничения на угол наклона траектории. Уравнения движения в безразмерных переменных имеют вид[1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = v\cos\theta, \\ \dot{y} = v\sin\theta, \\ \dot{v} = -v - \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u. \end{cases}$$

Здесь x – дальность, y – высота, фазовое ограничение в отличие, в отличие от встречающегося в литературе [2] $ax + b \leqslant y$, имеет вид: $\theta \in [\theta_1; \theta_2]$ – угол наклона траектории (ограничен константами), v – скорость.

Начальные условия:

$$x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad v(0) = v_0.$$

Функционал:

$$J = -x(T) \to \min, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Переходя к редуцированной системе с управлением θ получаем регулярную оптимальную задачу с ограничениями на управление. С помощью принципа максимума задача оптимального управления сводится к краевой задаче для системы двух нелинейных ДУ:

$$\begin{cases} \dot{v} = -v - \sin\theta, \\ \dot{\psi}_v = \psi_v - \cos\theta. \end{cases}$$

$$v(0) = v_0, \quad \psi_v(T) = 0, \qquad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

$$\theta = \begin{cases} \theta_1 & , \quad -\operatorname{arctg}(\psi_v/v) < \theta_1, \\ -\operatorname{arctg}(\psi_v/v), & \quad -\operatorname{arctg}(\psi_v/v) \in [\theta_1, \theta_2], \\ \theta_2 & , \quad -\operatorname{arctg}(\psi_v/v) > \theta_2. \end{cases}$$

В результате применения принципа максимума аналитически устанавливается, что оптимальная траектория может содержать не более одной дуги движения по нижнему ограничению и не более двух дуг движения по верхнему ограничению. При отсутствии сопротивления показывается, что, оптимальная траектория содержит не более одной дуги с движением по каждому из ограничений.

Источники и литература

1) Зароднюк А.В, Черкасов О.Ю. Качественный анализ траекторий движения материальной точки в сопротивляющейся среде и задача о брахистохроне// Изв. РАН. ТиСУ. 2015 №1.С.41- 49
2) А.Брайсон, Хо Ю-Ши. Прикладная теория оптимального управления. Изд-во «Мир»,Москва, 1972, 544 с.