Секция «Вычислительная механика»

Способ ортогонализации матрицы поворота

Научный руководитель – Куланов Николай Владимирович

Григоров П.Ю.[1], *Голубева А.А.*[2]
1 - Московский физико-технический институт, Москва, Россия, *E-mail: grigoroff@bk.ru*; 2 - Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия, *E-mail: ellen93@yandex.ru*

В работе предлагается новый метод поиска оптимальной ортогональной матрицы с использованием метода множителей Лагранжа и численных методов решения полиномиальных уравнений 4го порядка. Данный метод может быть полезен и интересен теоритическим специалистам, а также инженерам для решения прикладных задач. С точки зрения прикладного применения, метод может быть использован в задачах моделирования пространственного движения и может быть полезен в таких областях как прикладная механика, авиация, космонавтика, робототехника, небесная механика и прочих.
При численном интегрировании пространственного движения твердого тела, матрица поворота, задающая текущую ориентацию, может претерпевать “искажения” – терять ортогональность и нормировку. И таким образом она уже не будет являться матрицей поворота. Для исправления этих искажений применяют процедуры ортогонализации, например классический или модифицированный методы Грама Шмидта [1], которые не обладают оптимальностью в смысле минимальных отклонений входной и скорректированной матриц. Также для решения этой задачи используются методы коррекции, предложенные в работе [2].
Постановка задачи: имея три вектора $\boldsymbol{b_1}, \boldsymbol{b_2}, \boldsymbol{b_3}$ искаженной (но не вырожденной) матрицы поворота B, получить вектора $\boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \boldsymbol{c_3}$ и обеспечить условие орто-нормированности, с учетом минимального отклонения по сумме квадратов:

$$\sum_{\boldsymbol{i}=1..3} (\boldsymbol{c_i} - \boldsymbol{b_i})^{\mathbf{2}} \rightarrow min$$

$$\boldsymbol{c_i} \cdot \boldsymbol{c_i} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{i} = 1..3$$

$$\boldsymbol{c_i} \cdot \boldsymbol{c_j} = \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = 1..3\boldsymbol{,}\ \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j}$$

$$(\boldsymbol{c_i} - \boldsymbol{b_i}\ ) = \boldsymbol{\alpha_i}$$

Необходимые условия экстремума:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha_1}} = 2\boldsymbol{\alpha_1} + \mathbf{2}\lambda_1 \boldsymbol{c_1} + \lambda_4 \boldsymbol{c_2} + \lambda_5 \boldsymbol{c_3} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha_2}} = 2\boldsymbol{\alpha_2} + \mathbf{2}\lambda_2 \boldsymbol{c_2} + \lambda_4 \boldsymbol{c_1} + \lambda_6 \boldsymbol{c_3} = \mathbf{0} \\ \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\alpha_3}} = 2\boldsymbol{\alpha_3} + \mathbf{2}\lambda_3 \boldsymbol{c_3} + \lambda_5 \boldsymbol{c_1} + \lambda_6 \boldsymbol{c_2} = \mathbf{0} \\ \boldsymbol{c_i} \cdot \boldsymbol{c_i} = \mathbf{1}\ \boldsymbol{i} = \mathbf{1..3} \\ \boldsymbol{c_i} \cdot \boldsymbol{c_j} = \mathbf{0}\ \ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} = \mathbf{1..3}\boldsymbol{,}\ \boldsymbol{i} \neq \boldsymbol{j} \end{cases}$$

В работе предлагается решение системы необходимых условий путем разделения на три зависимых подсистемы с учетом входящих неизвестных переменных. Решение каждой подсистемы определяется через последовательный поиск результантов. Приравнивая результанты к нулю, находится решение систем методом Феррари [3] или численно прямой итерацией. После проверки достаточных условий экстремума находится итоговое решение задачи.

Источники и литература

1) J. Daniel, W.B. Gragg, L. Kaufman, and G. W. Stewart, Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt QR factorization, MATHEMATICS OF COMPUTATION. Vol. 30 № 136. USA.MI AMS, 1976.
2) Куланов Н.В. Методика ортонормирования двух векторов матрицы направляющих косинусов при численном интегрировании уравнений кинематики. Ученые записки ЦАГИ Жуковский ЦАГИ, 2018
3) Земляков А.Н. Введение в алгебру и анализ: культурно-исторический дискурс. М. БИНОМ. Лаборатория Знаний, 2012.