Секция «Вычислительная математика, математическое моделирование и численные методы»

Применение явной разностной схемы с переменными шагами Лебедева по времени для решения одной задачи оптимального управления

Научный руководитель – Романенко Артур Данилевич

Барбашов Тимур Дмитриевич

Студент (бакалавр)

Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий, Казань, Россия

E-mail: barbashovtd@mail.ru

В цилиндре $Q_T = \Omega \times [0,T]$ с границей $\Gamma_T = \partial\Omega \times [0,T]$ рассматривается задача состояния

$$\left| \begin{array}{l} \mathcal{L}y = y_t - \mathcal{A}y = u, \quad \text{в } Q_T \\ y(x,t) = 0, \quad x \in \Gamma_T, \\ y(x,0) = y_0(x), \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \tag{1}$$

с оператором дробного дифференцирования, содержащим производные Римана-Лиувилля

$$\mathcal{A}y = \frac{1+\beta}{2}\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} + \frac{1-\beta}{2}\frac{\partial^\alpha y}{\partial(-x)^\alpha}, \quad \alpha \in [1,2], \beta \in [-1,1],$$

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_a^x \frac{y(\xi,x)}{(x-\xi)^{\alpha-1}}d\xi,$$

$$\frac{\partial^\alpha y}{\partial(-x)^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int\limits_b^x \frac{y(\xi,x)}{(\xi-x)^{\alpha-1}}d\xi,$$

Вводятся выпуклые и замкнутые множества ограничений на состояние и управления

$$Y_{ad} = \{y \in L_2(0,T; H_0^\alpha(\Omega)) : y_1 \leqslant y(x,t) \leqslant y_2 \forall (x,t) \in Q_T\},$$

$$U_{ad} = \{u \in L_2(Q_T) : u_1 \leqslant u(x,t) \leqslant u_2 \ \forall (x,t) \in Q_T\}.$$

Решается задача оптимального управления с квадратичным функционалом вида

$$\min_{(y,u)\in K} J(y,u) = \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} (y-y_d)^2 \ dxdt + \frac{1}{2}\int\limits_{Q_T} u^2 \ dxdt \tag{2}$$

с заданной функцией наблюдения y_d и управлением u.

$$K = \{(y,u) \in Y_{ad} \times U_{ad} \text{ и выполнено } (1)\}$$

На сетке с постоянным по пространству шагом h и переменными шагами по времени строится явная разностная схема. При построении переменных шагов используется подход, предложенный В.И. Лебедевым, основанный на применении корней полиномов Чебышева [1]. Шаги определяются с помощью соотношения

$$\tau_j = \frac{2}{M + m - (M - m)x_j},$$
где $\{x_j\}_{j=0}^{k-1}$ – корни полинома Чебышёва $T_k(x)$,
M, m – границы спектра оператора $\mathcal{A}$.

Особенность сеточной задачи заключается в заполненной матрице оператора A в результате применения аппроксимации по формуле Грюнвальда-Летникова. Подход с использованием явной схемы и переменных шагов позволяет решить задачу по явным формулам без задействования дополнительных ресурсов памяти и времени, поскольку нет необходимости решать на каждом слое систему линейных уравнений.

Численное решение задачи оптимального управления (2) осуществляется с помощью предобусловленного итерационного метода Удзавы [2]. Предобусловливатель выбирается из условий простоты его обращения и энергетической эквивалентности матрице уравнения состояния с постоянными, не зависящими от параметров сетки, что гарантирует сходимость метода с любого начального приближения.

Источники и литература

1) В. И. Лебедев, С. А. Финогенов, “Решение проблемы упорядочения параметров в чебышевских итерационных методах”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 13:1 (1973), 18–33

2) A. Lapin. Preconditioned Uzawa-type methods for finite-dimensional constrained saddle point problems// Lobachevskii J. Math. V.31, No 4. 2010 P. 309-322.