Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

## Достижимые значения длин квадратичных алгебр

**Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич**

***Кудрявцев Дмитрий Константинович***
*Студент (специалист)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Москва, Россия
*E-mail: kdk97@rambler.ru*

Систематическое изучение длины алгебры как ее фундаментального инварианта началось в конце 20 века с работ [1, 2], где изучаются свойства длины для ассоциативных, в том числе матричных, алгебр. В частности, работа [2] рассматривает связь длины с размерностью алгебры и максимальной степенью минимальных многочленов для ее элементов. Изучение подобной связи для неассоциативного случая начато в работе [3].

Рассмотрим конечномерную не обязательно ассоциативную алгебру с единицей $A$ над полем $\mathbb{F}$. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — конечный набор ее элементов. *Словом длины* $k$ для этой системы называется произведение $a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_k}$ с произвольным порядком выполнения умножений, где $i_m \in \{1, \ldots, n\}$.

Обозначим через $L_k(S)$ линейную оболочку над $\mathbb{F}$ всех слов длины не более $k$. Говорят, что система элементов $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ *порождает алгебру* $A$, если существует $k$, такое что $L_k(S)$ совпадает с $A$. Самое маленькое такое $k$ называется *длиной* данной системы.

*Длиной алгебры* $A$ называется максимальная длина системы среди всех конечных систем, порождающих $A$.

Алгебра $A$ с единицей называется *квадратичной*, если для любого $a \in A$ верно, что $1, a, a^2$ линейно зависимы над $\mathbb{F}$.

Важным частным случаем квадратичных алгебр являются локально-комплексные алгебры, подробно описанные в работе [4].

Обозначим последовательность Фибоначчи через $F_0 = 0, F_1 = 1, F_2 = 1, \ldots$

**Утверждение 1.** Для квадратичной неассоциативной алгебры $A$ размерности $n$ реализуются все значения длины, лежащие между $F_{n-2}$ и $F_{n-1}$, имеющие две единицы в фибоначчиевой системе исчисления.

**Утверждение 2.** Для квадратичной неассоциативной алгебры $A$ размерности $n$ реализуются все значения длины, лежащие между $F_{n-2}$ и $F_{n-1}$, имеющие три единицы в фибоначчиевой системе исчисления и сегмент "1001".

### Источники и литература

1) Paz, A. An application of the Cayley-Hamilton theorem to matrix polynomials in several variables, Linear Multilinear Algebra, 1984, Vol.15, pp. 161-170
2) Papacena, C.J. An Upper Bound for the Length of a Finite-Dimensional Algebra, Journal of Algebra, 1997, Vol. 197, pp. 535-545
3) Guterman, A. E., Kudryavtsev, D. K. Upper bounds for the length of non-associative algebras, Journal of Algebra, 2020, Vol. 544, pp. 483-497
4) Bresar, M., Semrl, P., Spenko, S. On locally complex algebras and low-dimensional Cayley-Dickson algebras, Journal of Algebra, 2011, Vol. 327, pp. 107-125