Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

О теореме Бернштейна – фон Мизеса о состоятельности оценки параметра для марковской цепи

Научный руководитель – Веретенников Александр Юрьевич

Нуриева Аиша Ильдаровна

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,

Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия

E-mail: ai_nurieva@mail.ru

Целью доклада является презентация результата о состоятельности байесовской оценки параметра для конечной или счетной цепи Маркова. Оценки такого типа, по существу, аналогичны оценкам для независимых, одинаково распределенных наблюдений (н.о.р.с.в., см., например, [3]), однако, обычно они излагаются одновременно с асимптотической нормальностью, что требует существенно больших предположений, чем лишь для состоятельности. Также и для последней, как правило, налагаются некоторые количественные предположения на зависимость распределения от параметра. В то же время, для случая н.о.р.с.в. существует красивый мартингальный метод, предложенный Дубом [1] и не требующий ничего, кроме отличия распределений при любых двух различных значениях параметра. Работа [1] считается первым строгим доказательством "теоремы Бернштейна – фон Мизеса" о состоятельности оценки параметра для случая н.о.р.с.в. в "общем случае"; отметим, что и Бернштейн и фон Мизес доказали указанный результат о состоятельности для определенных частных случаев. В настоящем докладе будет представлено доказательство аналогичного результата для байесовской оценки параметра для конечной или счетной цепи Маркова (МЦ) со свойством эргодичности. Условие отличия распределений для любых двух разных значений параметра заменяется условием отличия переходной (конечной или счетной) матрицы для любых двух различных значений параметра.

Итак, пусть $\{X_n\}$ – МЦ с не более чем счетным числом состояний S и σ-алгеброй $\mathcal{S}$, переходная матрица вероятностей $\{X_n\}$ зависит от параметра $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$, где Θ – открытое (связное) ограниченное множество. Пусть $Z_n = (X_n, X_{n+1})$, $Y_n = I(Z_n \in A)$. *Предполагается,* что процесс $\{X_n\}$ эргодичен (об условиях, требуемых для этого, см., например, [2]). В этом случае эргодичным оказывается и процесс $\{Z_n\}$. В частности, имеет место усиленный закон больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} I(Z_k \in A) \xrightarrow{P_\theta-\text{п. н.}} \mathbb{E}_{inv} I(Z_0 \in A) = F(\theta, A),$$

где $F(\theta, \cdot)$ – стационарное распределение МЦ $\{Z_n\}$ для данного θ. Считаем, что параметр θ случаен, имеет плотность $q(\theta) > 0$ при всех $\theta \in \Theta$, и $E\theta < \infty$. Байесовская оценка параметра по наблюдениям $(X_1, \dots, X_n)$ представима в виде $\hat{\theta}_n = E(\theta | X_1, \dots, X_n)$.

Теорема Пусть выполнены условия:

1) Разным значениям параметра θ соответствует различные матрицы переходных вероятностей, плотность $q(\theta) > 0$ всюду, и $E\theta < \infty$;
2) МЦ $\{X_n\}$ эргодична, и при любом θ для МЦ $\{Z_n\}$ справедлив закон больших чисел

Тогда имеет место сильная состоятельность оценки $\hat{\theta}_n$:

$$\lim_{n\to\infty} \hat{\theta}_n = \theta, \quad \mathbb{P}\text{-п.н.}$$

Список литературы

[1] J.L. Doob, Application of the theory of martingale, in: B. Locker, Doob at Lyon, Electr. Journal Of History of Probability and Statistics, June 2009, 1-28.

[2] А.А. Боровков, Теория вероятностей, Изд-во Института математики, Новосибирск, 2018.

[3] А.А. Боровков, Математическая статистика, Наука, Москва, 1984.