Секция «Геометрия и топология»

Интегрируемый биллиард с проскальзыванием

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Завьялов Владимир Николаевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: vnzavyalov@mail.ru

Пусть дана кусочно-гладкая кривая, состоящая из дуг софокусных квадрик, причем углы при вершинах равны $\frac{\pi}{2}$. Биллиард - гамильтонова система, описывающая движение материальной точки внутри области, ограниченной этой кривой. Шар (материальная точка) движется в области по прямолинейным отрезкам, с сохранением скорости и отражается от кривой по закону "угол падения равен углу отражения". При попадании в угол точка после отражения продолжает движение по той же прямой, по которой попала в этот угол.

Пусть (x,y) - декартовы координаты на плоскости. Эллиптико-гиперболический биллиард задается семейством софокусных квадрик, которые определяются уравнением

$$(b-\lambda)x^2 + (a-\lambda)y^2 = (a-\lambda)(b-\lambda)[1],$$

где $a > b > 0$. Рассмотрим "биллиардный стол", ограниченный эллипсом, который соответствует значению параметра $\lambda = 0$. В теории интегрируемых систем представляют интерес интегрируемые биллиарды, для которых вдоль траектории сохраняется дополнительная функция, функционально независимая от квадрата длины вектора скорости.

Теорема (Якоби, Шаль) [1,2] Касательные прямые к геодезической линии на квадрике в n - мерном евклидовом пространстве, проведенные во всех точках геодезической, касаются кроме этой квадрики еще n-2 конфокальных с ней квадрик, одних и тех же для всех точек данной геодезической.

Следовательно траектория эллиптического биллиарда касается софокусного эллипса или софокусной гиперболы. Параметр этой софокусной квадрики и есть дополнительный интеграл λ.

Определим новую интегрируемую систему, называемую биллиардом с проскальзыванием. Пусть даны два эллипса. При попадании на границу точка продолжает движение по второму эллипсу, выходя из соответствующей ей симметричной точки на другом эллипсе под тем же углом. Аналогично можно определить систему, при которой точка после отражения продолжает движение по тому же эллипсу, но выходит из диаметрально противоположной точки, "проскальзывая". Заметим, что обе системы по прежнему останутся интегрируемыми с тем же интегралом, что и классический биллиард в эллипсе. Это позволяет изучить топологию соответствующей изоэнергетической поверхности, используя теорию инвариантов интегрируемых систем Фоменко-Цишанга.[3]

Источники и литература

1) *Козлов В.В., Трещев Д.В.* Генетическое введение в динамику систем с ударами. М.: Изд-во МГУ, 1991.

2) *В. В. Ведюшкина (Фокичева), А. Т. Фоменко.* “Интегрируемые топологические биллиарды и эквивалентные динамические системы”. - Известия РАН, серия Математика, 81:4, 2017, с.20-67.

3) *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. Т.1,2, Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 1999.

Иллюстрации

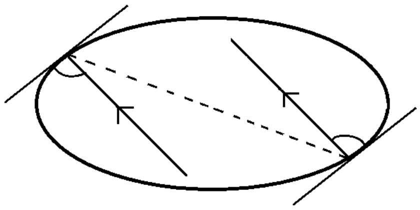

Рис. 1. Движение точки по эллипсу с проскальзыванием.