Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Равномерная сходимость и асимптотики для задач в областях с мелкой перфорацией вдоль заданного многообразия в случае усредненного условия Дирихле

Научный руководитель – Борисов Денис Иванович

Мухаметрахимова Альбина Ишбулдовна

Аспирант

Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы, Уфа, Россия

E-mail: albina8558@yandex.ru

Пусть $x=(x',x_n)$, $x'=(x_1,\ldots,x_{n-1})$ – декартовы координаты в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n-1}$ соответственно, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ – область с границей класса C^2, $S\subset\Omega$ – многообразие без края класса C^2 коразмерности 1. Обозначим через ε малый положительный параметр и через $\eta=\eta(\varepsilon)$ функцию, удовлетворяющую неравенству: $0<\eta(\varepsilon)\leqslant 1$. Пусть $\mathbb{M}^\varepsilon\subseteq N$ – произвольное множество, M_k^ε, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$ – точки, удовлетворяющие условию: $dist(M_k^\varepsilon,S)\leqslant R_0\varepsilon$, где $R_0>0$ – константа, не зависящая от k и ε. Через $\omega_{k,\eta}\subset\mathbb{R}^n$, $k\in\mathbb{M}^\varepsilon$ обозначим ограниченные области с границами класса C^2. Положим: $\omega_k^\varepsilon:=\{x:(x-M_k^\varepsilon)\varepsilon^{-1}\eta^{-1}\in\omega_{k,\eta}\}$, $\theta^\varepsilon:=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{M}^\varepsilon}\omega_k^\varepsilon$, $\Omega^\varepsilon:=\Omega\setminus\theta^\varepsilon$. Введем множества: $\theta^\varepsilon=\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon\cup\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$, $\theta_\natural^\varepsilon=\bigcup\limits_{k\in\mathbb{M}_\natural^\varepsilon}\omega_k^\varepsilon$, $\natural\in\{\mathrm{D},\mathrm{R}\}$, где $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon\cap\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon=\emptyset$, $\mathbb{M}_{\mathrm{D}}^\varepsilon\cup\mathbb{M}_{\mathrm{R}}^\varepsilon=\mathbb{M}^\varepsilon$.

Обозначим через $A_{ij}=A_{ij}(x)$, $A_i=A_i(x)$, $A_0=A_0(x)$ функции, заданные в Ω и удовлетворяющие следующим условиям: $A_{ij},A_i\in W_\infty^1(\Omega)$, $A_0\in L_\infty(\Omega)$, $A_{ij}=A_{ji}$, $i,j=1,\ldots,n$, $\sum\limits_{i,j=1}^n A_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant c_0|\xi|^2$, $x\in\Omega$, $\xi=(\xi_1\ldots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n$, где $c_0>0$ – константа, не зависящая от x и ξ. Пусть $a=a(x,u)$ – функция, удовлетворяющая условию: $|a(x,u_1)-a(x,u_2)|\leqslant a_0|u_1-u_2|$, $a(x,0)=0$, где a_0 – константа, не зависящая от x, u_1 и u_2.

Рассматривается краевая задача:

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j}+A_0-\lambda\right)u_\varepsilon=f\quad\text{в}\quad\Omega^\varepsilon,\quad u_\varepsilon=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega,$$

$$u_\varepsilon=0\quad\text{на}\quad\partial\theta_{\mathrm{D}}^\varepsilon,\qquad\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial\mathrm{n}}+a(\cdot,u_\varepsilon)=0\quad\text{на}\quad\partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon,\quad\frac{\partial}{\partial\mathrm{n}}=\sum_{i,j=1}^n A_{ij}\cos(\nu,Ox_i)\frac{\partial}{\partial x_j},\tag{1}$$

где $f\in L_2(\Omega)$, λ – вещественное число, $\cos(\nu,Ox_i)$ – косинус угла между осью Ox_i и единичной нормалью ν к $\partial\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$, направленной внутрь множества $\theta_{\mathrm{R}}^\varepsilon$. Введем еще одну краевую задачу:

$$\left(-\sum_{i,j=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}A_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^n A_j\frac{\partial}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{A_j}+A_0-\lambda\right)u_0=f\quad\text{в}\quad\Omega\backslash S,\quad u_0=0\quad\text{на}\quad\partial\Omega\cup S.\tag{2}$$

Наш первый основной результат утверждает, что при условии $\dfrac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)}\to+0$, $\varepsilon\to+0$ и некоторых дополнительных предположениях относительно многообразия S и отверстий ω_k^ε верно неравенство:

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{W_2^1(\Omega^\varepsilon)} \leqslant C \left(\frac{\varepsilon}{\eta^{n-2}(\varepsilon)} \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L_2(\Omega)},$$

где константа C не зависит от ε и f.

Наш второй основной результат утверждает, что при периодическом расположении отверстий ω_k^ε и некоторых дополнительных предположениях относительно функций, участвующих в постановке задачи (1), асимптотика решения задачи (1) в норме $W_2^1(\Omega^\varepsilon)$ имеет вид

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,\xi,\eta) =& \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right) \sum_{m=0}^{N} \varepsilon^m u_m(x,\eta) + \left(1 - \chi\left(\frac{x_n}{\varepsilon^{\frac{1}{2}}}\right)\right) \sum_{m=1}^{N} \varepsilon^m v_m(\xi, x', \eta) \\ &+ O\left(\varepsilon^{-\frac{1}{4}}\left((\varepsilon\eta^{-n+2})^{N+1} + \varepsilon^{\frac{N+1}{2}}\right)\right), \end{aligned}$$

где $\xi = (\xi', \xi_n) = (x'\varepsilon^{-1}, x_n\varepsilon^{-1})$, $\chi = \chi(x_n)$ – бесконечно дифференцируемая срезающая функция, равная нулю при $|x_n| < 1$ и единице при $|x_n| > 2$, N – произвольное натуральное число, функция u_0 – решение задачи (2), функции u_m, $m \geqslant 1$ – решения задачи (2) с $f = 0$, функции v_m – решения задач

$$\begin{aligned} &-\Delta_\xi v_1 = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \quad v_1 = 0 \quad \text{на} \quad \partial\omega_{\mathrm{D}}^\eta, \quad \frac{\partial v_1}{\partial \nu_\xi} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta, \\ &-\Delta_\xi v_m = f_m \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \setminus \breve{\omega}^\eta, \quad \frac{\partial v_m}{\partial \nu_\xi} = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial v_{m-1}}{\partial x_i}\nu_i - L_{m-1}(v_1, \ldots, v_{m-1}) \quad \text{на} \quad \partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta, \\ &f_m := \frac{\xi_n^{m-2}}{(m-2)!}\frac{\partial^{m-2} f}{\partial x_n^{m-2}}(x',0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial^2 v_{m-1}}{\partial \xi_i \partial x_i} + (\Delta_{x'} + \lambda)v_{m-2}, \quad m \geqslant 2, \quad v_0 := 0, \\ &v_m(\xi, x', \eta) = \sum_{j=0}^{m} \frac{1}{j!}\frac{\partial^j u_{m-j}}{\partial x_n^j}(x', \pm 0, \eta)\xi_n^j + o(1), \quad m \geqslant 1 \quad \xi_n \to \pm\infty, \end{aligned}$$

где обозначено: $\breve{\omega}_\flat^\eta = \bigcup\limits_{k \in Z^{n-1}} \{\xi : \eta^{-1}(\xi - M_k - M_\flat) \in \omega_\flat\}, \flat \in \{\mathrm{R}, \mathrm{D}\}$, M_{D}, M_{R} – фиксированные точки, ω_{D}, ω_{R} – некоторые фиксированные ограниченные множества, $M_k = (b_1k_1, \ldots, b_{n-1}k_{n-1}, 0)$, $\breve{\omega}^\eta := \breve{\omega}_{\mathrm{D}}^\eta \cup \breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta$, ν_ξ – единичная нормаль к $\partial\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta$, направленная внутрь $\breve{\omega}_{\mathrm{R}}^\eta$, ν_i – компоненты вектора ν_ξ, L_m – некоторые фиксированные полиномы такие, что для каждого монома вида $Cv_1^{p_1}v_2^{p_2}\ldots v_m^{p_m}$ выполнено $p_1 + 2p_2 + \ldots + mp_m = m$.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-19995).