Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Об эллиптических операторах, ассоциированных с метаплектической группой

Научный руководитель – Савин Антон Юрьевич

Жуйков Константин Николаевич

Аспирант

Российский университет дружбы народов, Факультет физико-математических и естественных наук, Москва, Россия

E-mail: zhuykovcon@gmail.com

Рассматривается оператор вида конечной суммы

$$\mathcal{D} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} D_k \Phi^k \colon \mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow \mathcal{H}^{s-d}(\mathbb{R}^N), \tag{1}$$

где D_k суть операторы из класса Шубина [2] порядка $\le d$, Φ — метаплектический оператор (см., напр., [1,4]), $\mathcal{H}^s(\mathbb{R}^N)$ — пространство Соболева (см., напр., [5]). Группа G, порожденная степенями оператора Φ, изоморфна группе $\mathbb{Z}$.

Траекторным символом оператора (1) называется оператор-функция $\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)$ на $\mathbb{R}^{2N}\setminus\{0\}$, действующая ограниченно в пространствах $\ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s}) \to \ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s-d})$ по формуле

$$[\sigma_{\mathrm{tr}}(\mathcal{D})(x,\xi)]v(n) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sigma(D_k)(S^n(x,\xi))v(n-k), \tag{2}$$

где $\sigma(D_k)$ — главный символ оператора D_k, $S^n(x,\xi)$ — результат n-кратного применения симплектической матрицы S, отвечающей оператору Φ, к вектору $(x,\xi)\in\mathbb{R}^{2N}$, а пространство $\ell^2(\mathbb{Z},\mu_{x,\xi,s})$ — гильбертово пространство последовательностей на $\mathbb{Z}$, квадратично суммируемых с весом $\mu_{x,\xi,s}(n) = |S^n(x,\xi)|^{2s}$.

В терминах траекторного символа (2) даны условия эллиптичности оператора (1) в зависимости от показателя гладкости соответствующих пространств Соболева s, предъявлена теорема конечности. В качестве примера при помощи теоремы Антоневича [3] в явном виде найдены условия эллиптичности двучленного оператора, отвечающего симплектической матрице S общего вида. Результаты применены для исследования фредгольмовости задачи управления для уравнения Шрёдингера.

Результаты, представленные на докладе, получены в совместной работе с П. А. Сипайло. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: проект №19-01-00574, а также Минобрнауки России в рамках государственного задания: соглашение № 075-03-2020-223/3 (FSSF-2020-0018).

Источники и литература

1) Ж. Лере. *Лагранжев анализ и квантовая механика. Математическая структура, связанная с асимптотическими разложениями и индексом Маслова.* М.: Мир, 1981.
2) М.А. Шубин. *Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория.* М.: Добросвет, 2005.
3) A.B. Antonevich, A.V. Lebedev. *Functional Differential Equations: II. C^*-Applications Part 1: Equations with Continuous Coefficients.* Taylor & Francis, 1998.
4) M. de Gosson. *Symplectic geometry and quantum mechanics.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
5) A.Yu. Savin, B.Yu. Sternin. Noncommutative elliptic theory. Examples. *Proc. Steklov Inst. Math.* 2010, 193-211 p.