Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Сжимающие отображения в категории равномерных пространств

Научный руководитель – Орлов Игорь Владимирович

Друшляк Анастасия Игоревна
Аспирант
Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: hactinet@mail.ru

Введение

Цель данной работы – обобщение на случай равномерных пространств ряда классических условий метрической регулярности (теоремы о неподвижных точках и точках совпадения отображений).

исходя из известной теоремы А. Вейля об определяющей системе псевдометрик мы покажем, что любое равномерно непрерывное отображение в категории равномерных пространств можно можно представить в виде континуальной матрицы, элементы которой действуют уже в соответствующих парах псевдометрических пространств. Применяя к элементам матрицы известные условия метрической регулярности мы придем к их равномерным версиям.

1. Принцип сжимающих отображений: равномерная версия

Определение 1. Пусть X – РП, $X = \varprojlim_{i\in I} X_{\hat{d}_i}$ – его разложение Вейля. Назовем Φ W-сжатием, если для некоторого конфинального подмножества соответствующие определяющие псевдометрики $d_i, i \in I'$, являются сжатиями:

$$(i \in I') \Rightarrow (\forall x_2, x_2 \in X \exists k_i 0 \ \forall x \in X: \ (\Phi(B_R^X(x)) \supset B_{\alpha R}^X(\Phi(x))), \tag{1}$$

где $B_R^X(x)$ и $B_{\alpha R}^Y(\Phi(x))$ – соответствующие шары в X и Y.

Введем следующие равномерные аналоги приведенных выше понятий, опираясь, как и при определении равномерного сжатия, на соответствующие матрицы Вейля.

Определение 2. Пусть X и Y – РП, $X = \varprojlim_{i\in I} X_i$ и $\varprojlim_{j\in J} Y_j$ – их разложения Вейля, отображение $\Phi : X \to Y$ равномерно непрерывно, $W(\Phi) = (\Phi_i^j)_{i\succeq w(j)}^{j\in J}$ – его матрица Вейля. Назовем Φ *W-липшицевым отображением,* если для некоторого конфинального подмножества $J' \subset J$ выполнено:

$$\forall j \in J' \ \exists i \succeq w(j) \ \exists C_i^j \geq 0 \ \forall x_1, x_2 \in X: \quad d^j(\Phi(x_1), \Phi(x_2)) \leq C_i^j \cdot d_i(x_1, x_2). \tag{2}$$

Заметим, что последнее неравенство в (2), в силу построения матрицы Вейля, можно переписать в виде:

$$\hat{d}^j(\Phi_i^j(x_1^j), \Phi_i^j(x_2^i)) \leq C_i^j \cdot \hat{d}_i(x_1^i, x_2^i).$$

Определение 3. В обозначениях предыдущего определения, назовем отображение $\Phi : X \to Y$ *W-накрытием* (или *накрывающим по Вейлю*), если для некоторого конфинального подмножества $J' \subset J$ выполнено:

$$\forall j \in J' \ \exists i \succeq w(j) \ \exists \alpha_i^j 0 \ \forall \in X \forall R_i > 0 : \ (\Phi(B^X_{R_i}(x)) \supset B^Y_{\alpha_i^j \cdot R_i}(\Phi(x)). \tag{3}$$

(Здесь $B^X_{R_i}$ – шары в X в псевдометрике d_i; $B^Y_{\alpha_i^j \cdot R_i}$ – шары в Y в псевдометрике d^j).

Заметим, что поледнее условие в (3), в силу построения матрицы Вейля, можно переписать в виде:

$$\Phi_i^j(B^{X_i}_{R_i}(x^i)) \supset B^{Y_j}_{\alpha_i^j}(\Phi_i^j(x^i)).$$

Напомним теперь краткую метрическую формулировку теоремы Арутюнова-Милютина.

Теорема 1. *Пусть X и Y – метрические пространства, причем X полно, отображения $\Phi : X \to Y$ и $\Psi : X \to Y$ непрерывны. Если Φ – липшицево, с константой $\beta > 0$, а Ψ – накрыващее с константой $\alpha > 0$, причем , $\beta_j^i < \alpha_j^i$, то $\exists x \in X : \ \Phi(x) = \Psi(x)$.*

Источники и литература

1) Бурбаки Н. Общая топология. Вып.1. Наука, М. 1968. 272с.
2) Богачев В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ. R&C Dynamics. М. 2011. 727с.
3) Arutyunov, A .V. Covering mappings in metric spaces and fixed points. Doklady Mathematics. 2007. Vol. 76, No 2. P. 665-668.
4) Друшляк А. И., Неподвижные точки и точки совпадения в категории равномерных пространств. Математика, информатика, компьютерные науки, моделирование, образование: сборник научных трудов Всероссийской научно-практической конференции МИКМО-2019 и Таврической научной школы-конференции студентов и молодых специалистов по математике и информатике / Под ред. В. А. Лукьяненко. – Симферополь: ИП Корниенко А. А., 2019. – Вып. 1. 25– 29 с.