В качестве математической модели рассматривается следующая смешанная задача для уравнения Лапласа

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0, \qquad\qquad M \in D(F,H),\\ &u|_{z=H} = u_H,\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = h(U_1 - u)|_S,\\ &u|_\Gamma = f_1. \end{aligned} \tag{1}$$

Область $D(F,H)$ – цилиндрическая область прямоугольного сечения

$$D(F,H) = \{(x,y,z) :\, 0 < x < l_x,\, 0 < y < l_y,\, F(x,y) < z < H\}$$

ограниченная плоскостью $z = H$ и поверхностью

$$S = \{(x,y,z) :\, 0 < x < l_x,\, 0 < y < l_y,\, z = F(x,y) < H\}.$$

граница Γ – совокупность боковых граней цилиндрической области $D(F,H)$.

Если u_H не известна, но задана функция $u|_S = f$, то получаем обратную задачу в виде смешанной задачи для уравнения Лапласа с условиями Коши на поверхности S, т.е. задается функция и ее нормальная производная, граница $z = H$ области $D(F,H)$ свободна

$$\begin{aligned} &\Delta u(M) = 0, \qquad\qquad M \in D(F,H),\\ &u|_S = f,\\ &\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_S = h(U_1 - f)|_S,\\ &u|_\Gamma = f_1, \end{aligned} \tag{2}$$

Задача (2) сведена к интегральному уравнению первого рода, устойчивое решение которого строится методом регуляризации Тихонова как экстремаль сглаживающего функционала.

Литература

1. Будак Б. М., Самарский А. А., Тихонов А. Н. Сборник задач по математической физике. М.: наука. Главная физико-математической литературы, 1980 , 688стр.
2. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики. М.: ФИЗМАТЛИТ , 2003. – 400с.
3. Ланеев Е. Б. Некорректные задачи продолжения гармонических функций и потенциальных полей и методы их решения. М.: Изд-во РУДН , 2006. 139с