Динамика портфеля активов на основе физической и риск-нейтральной вероятностной меры

Данилишин Артем Ростиславович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: danilishin-artem@mail.ru

Научный руководитель — *Голембиовский Дмитрий Юрьевич*

Основой оценки рисков производных финансовых инструментов на различные базовые активы является совместное моделирование динамики цен этих активов. В случае задач большой размерности, используется метод главных компонент [1], который позволяет сделать переход от цен базовых активов к относительно небольшому числу некоррелированных компонент, каждая из которых может моделироваться независимо от остальных. Современная теория финансовой математики предлагает использование риск-нейтральных вероятностных мер [2], т.к. данные меры позволяют учитывать не только историю рынка, но и его перспективу. Вследствие чего возникает вопрос о возможности применимости техники метода главных компонент к риск-нейтральному преобразованию меры.

В работе [3] показано, что использование расширенного принципа Гирсанова совместно с методом главных компонент не представляется возможным, т.к. требует знания совместного распределения главных компонент. В качестве альтернативы была применена модификация расширенного принципа Гирсанова [3], которая позволяет, зная распределения главных компонент, с помощью производящих функций моментов перейти от физической вероятностной меры к риск-нейтральной. Основой модификации выступает замена логарифмической доходности базового актива $Y_t^j = \ln\left(\frac{S_t^j}{S_{t-1}^j}\right)$ обычной доходностью $\tilde{Y}_t^j = \frac{S_t^j}{S_{t-1}^j} - 1$, где $j = 1, \dots, l$ - номер базового актива в общем портфеле активов.

Используя метод главных компонент, можно получить компоненты X_t^i, которые при помощи матрицы коэффициентов $A = \left(a_j^i\right)$ восстанавливают динамику исходного случайного процесса: $Y_t^j = \sum_{i=1}^m a_j^i X_t^i$, где m - общее количество компонент X_t^i, в случае сокращения размерности исходного случайного вектора $m < l$. Каждая компонента (случайный процесс) описывается моделью

$ARIMA(p,d,q) - GARCH(P,Q)$ [4].

$$\left\{\begin{array}{l} X_t^i = m_t^i + \epsilon_t^i \\ \epsilon_t^i = \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i, \varepsilon_t^i \sim iid(0,1) \\ m_t^i = \varphi_0^i + \varphi_1^i X_{t-1}^i + ... + \varphi_p^i X_{t-p}^i + \theta_1^i \epsilon_{t-1}^i + ... + \theta_q^i \epsilon_{t-q}^i \\ h_t^i = \alpha_0^i + \alpha_1^i h_{t-1}^i + ... + \alpha_P^i h_{t-P}^i + \beta_1^i {\epsilon_{t-1}^i}^2 + ... + \beta_Q^i {\epsilon_{t-Q}^i}^2 \end{array}\right. \tag{1}$$

Тогда выражение для перехода от физической вероятностной меры к риск-нейтральной будет иметь вид

$$M_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{Q}}(c) = e^{-\frac{\mu_t c}{1+\mu_t}} M_{\tilde{Y}_k}^{\mathbb{P}}\left(\frac{c}{1+\mu_t}\right), \tag{2}$$

где $\mu_t = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\tilde{Y}_t + 1 | \mathcal{F}_{t-1}\right]}{\left(1+\frac{r}{n}\right)^n} - 1$, n - количество начислений за год безрисковой ставки процента r. Искомое уравнение динамики базового актива относительно риск-нейтральной вероятностной меры примет вид

$$\tilde{Y}_t^j = \left(1 + \frac{r_j}{n}\right)^n - 1 + \left(\frac{\left(1+\frac{r_j}{n}\right)^n}{1 + \sum_{i=1}^m a_j^i m_t^i}\right)\sqrt{\sum_{i=1}^m {a_j^i}^2 h_t^i} E_t^j, \tag{3}$$

$$E_t^j = \sum_{i=1}^m \frac{a_j^i \sqrt{h_t^i}\varepsilon_t^i}{\sqrt{\sum_{i=1}^m {a_j^i}^2 h_t^i}} \sim iid(0,1). \tag{4}$$

Литература

1. Pearson K. On lines and planes of closest fit to systems of points in space. Phil. 1901. P.559-572. doi:10.1080/14786440109462720.
2. Follmer H., Schied A. Stochastic finance: An introduction in discrete time. Berlin: Walter de Gruyter. 2002. 422 P.
3. Данилишин А., Голембиовский Д. Риск-нейтральная динамика для модели ARIMA-GARCH с ошибками, распределенными по закону Su Джонсона. Информатика и ее применения. 2020. Т. 14, № 2. P.48-55. doi:10.14357/19922264200107.
4. Box G., Jenkins G., Reinsel C. Time Series Analysis: Forecasting and Control, Prentice Hall, Englewood Cliffs. N.J. 3rd ed., 1994.