

МНОГОМЕРНАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ

Айвазян Сагак Арамович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: ayvazyansky@yandex.ru

Научный руководитель — Ульянов Владимир Васильевич

Пусть X_1, X_2, \dots, X_n независимые случайные векторы в R^k с конечным третьим моментом $\gamma_j^3 = \mathbb{E}\|X_j\|^3$, нулевым математическим ожиданием $\mathbb{E}X_j = \bar{0}$ и единичной ковариационной матрицей $\text{cov}(X_j) = I$ для $j = 1..n$. Обозначим \mathfrak{B} — множество всех измеримых выпуклых множеств, Φ — многомерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций и $\gamma^3 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \gamma_j^3$. В [1] была получена оценка для скорости сходимости нормированной суммы случайных векторов к многомерному стандартному нормальному распределению в виде следующего неравенства

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}} \left| P\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \in B\right) - \Phi(B) \right| \leq C(k) \frac{\gamma^3}{\sqrt{n}}, \quad (1)$$

при этом $C(k)$ зависит только от размерности R^k .

В одномерном случае оценка (1) оптимальна, однако Б.Клартаг и С.Содин показали, что если рассматривать взвешенные суммы вида $\sum_{i=1}^n \theta_i X_i$, где $\sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1$, то порядок скорости сходимости можно существенно улучшить. В [2] была доказана теорема

Теорема 1. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n независимые случайные величины с конечным четвертым моментом $\delta_j^4 = \mathbb{E}|X_j|^4$ и $\mathbb{E}X_j = \bar{0}$ для $j = 1..n$. Обозначим $\delta^4 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_j^4$ и Θ как случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере $S^{n-1} = \{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) : \sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1\}$. Тогда для любого $\rho > 0$ существует подмножество $\mathfrak{S} \subseteq S^{n-1}$ с $P(\Theta \in \mathfrak{S}) > 1 - \rho$ и константа $C(\rho)$ такие, что для любого $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathfrak{S}$ выполняется следующее неравенство

$$\sup_{a, b \in R, a < b} \left| P\left(a \leq \sum_{i=1}^n \theta_i X_i \leq b\right) - \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \right| \leq C(\rho) \frac{\delta^4}{n}. \quad (2)$$

При этом $C(\rho) \leq C \ln^2(\frac{1}{\rho})$, где C — универсальная константа.

Результат (2) был перенесен на многомерный случай, доказана следующая теорема

Теорема 2. Пусть X_1, X_2, \dots, X_n независимые случайные векторы в R^k с конечным четвертым моментом $\delta_j^4 = \mathbb{E}\|X_j\|^4$, нулевым математическим ожиданием $\mathbb{E}X_j = \bar{0}$ и единичной ковариационной матрицей $\text{cov}(X_j) = I$ для $j = 1..n$. Обозначим \mathfrak{B} — множество всех выпуклых множеств, Φ — многомерное нормальное распределение с нулевым средним и единичной матрицей ковариаций, $\delta^4 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_j^4$ и Θ как случайный вектор, равномерно распределенный на единичной сфере $S^{n-1} = \{(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) : \sum_{j=1}^n \theta_j^2 = 1\}$. Тогда для любого $\rho > 0$ существует подмножество $\mathfrak{Z} \subseteq S^{n-1}$ с $P(\Theta \in \mathfrak{Z}) > 1 - \rho$ и константа $C(\rho, k)$ такие, что для любого $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathfrak{Z}$ выполняется следующее неравенство

$$\sup_{B \in \mathfrak{B}} |P(\sum_{i=1}^n \theta_i X_i \in B) - \Phi(B)| \leq C(\rho, k) \frac{\delta^4 (\ln(n))^{\frac{k}{2}}}{n}.$$

При этом $C(\rho, k) \leq C \frac{2^k k^{\frac{k}{2}+1}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \ln^2(\frac{1}{\rho})$, где C — универсальная константа.

Таким образом, результат Б.Клартага и С.Содина был обобщен на многомерный случай, но при этом возник дополнительный логарифмический множитель. Доказательство теоремы потребовало более тщательного анализа поведения характеристической функции в области $\frac{a\sqrt{n}}{\delta^2} \leq \|\vec{t}\| \leq \frac{n}{\delta^4}$, где a — константа.

Литература

1. Бхаттачария Р. Н., Ранга Рао Р. Аппроксимация нормальным распределением и асимптотические разложения. М.: Наука, 1982.
2. Klartag B., Sodin S. Variations on the Berry–Esseen theorem, Теория вероятностей и ее применения. 2011. Т. 56, № 3. С. 514–533.