О взаимодействии особых точек слабого решения эллиптической краевой задачи Дирихле с разрывным коэффициентом

Боговский Антон Михайлович

Аспирант

Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: abogovski@gmail.com

***Научный руководитель** — д.ф.-м.н. профессор Денисов В. Н.*

Настоящая работа продолжает начатые в [1] исследования эффекта взаимодействия особенностей слабого решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения в дивергентной форме с разрывным скалярным кусочно-постоянным коэффициентом $\varkappa > 0$ в функциональном классе L^1_p-решений с первыми производными из L_p во всей шкале значений показателя $p \in (1, \infty)$. В отличие от [1] теперь рассматривается случай кусочной C^1-гладкости разрывного коэффициента $\varkappa$ и допускаются точки излома его линий разрыва.

Как и в [1] особые точки $\partial\Omega$, т. е. точки негладкости, предполагаются угловыми с ненулевыми углами, а линии разрыва коэффициента $\varkappa$ предполагаются C^1-гладкими и допускаются их некасательные пересечения с $\partial\Omega$. По-прежнему допускаются случаи вхождения в граничную точку, в том числе и угловую, любого конечного числа линий разрыва в рамках оговоренных в [1] ограничений.

Как и в [1] случай слабой постановки задачи Неймана не рассматривается. Это объясняется установленной в [2] эквивалентностью слабых L^1_p-постановок краевых задач Дирихле и Неймана для любой односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, в том числе и неограниченной, но с дополнением, имеющим непустую внутренность. Разумеется, в общем случае вопросы эквивалентности или неэквивалентности слабых постановок задач Дирихле и Неймана требуют отдельного исследования и здесь не затрагиваются.

Как и в [1] рассматриваются нетривиальные слабые L^1_p-решения однородной задачи и изучается эффект взаимодействия особых точек, т. е. точек негладкости, этих решений. Сохраняя классификацию конечных и бесконечных граничных особых точек из [1], отметим, что в отличие от [1] число конечных особых точек может быть произвольным, и среди них допускаются исключавшиеся ранее точки излома линий разрыва.

Как и в [1] предполагается, что все особые точки характеризуются единственным простым собственным числом задачи Штурма–

Лиувилля $\lambda = -\mu^2$ с параметром $\mu \in (0,\, 1)$. Установлено, что в случае, когда все особые точки являются конечными, размерность ядра рассматриваемого эллиптического оператора

$$L = \operatorname{div}(\varkappa\nabla\cdot)\colon \mathring{L}^1_p(\Omega) \to \mathring{L}^{-1}_p(\Omega) \overset{\text{def}}{=} \Big(\mathring{L}^1_q(\Omega)\Big)^*, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \qquad (1)$$

равна числу особых точек при $1 < p < 2/(1+\mu)$ и совпадает с коразмерностью замкнутой области значений оператора, сопряженного к (1), но уже с сопряженным показателем $p > 2/(1-\mu)$. В случае одной единственной бесконечной особой точки результат из [1] сохраняется, т. е. размерность ядра эллиптического оператора (1) равна единице при $p > 2/(1-\mu)$ и совпадает с коразмерностью замкнутой области значений сопряженного к (1) оператора, но уже с сопряженным показателем p: $1 < p < 2/(1+\mu)$.

В [1] было установлено, что при одной конечной и одной бесконечной особых точках с одним и тем же параметром $\mu \in (0,\, 1)$ размерности ядра и коядра оператора (1) равны нулю при $p \neq 2/(1\pm\mu)$. Основным результатом настоящей работы является доказательство сохранения этого равенства в случае произвольного числа конечных особых точек при одной бесконечной, т. е. оператор (1) при $p \neq 2/(1\pm\mu)$ осуществляет изоморфизм $\mathring{L}^1_p(\Omega)$ на $\mathring{L}^{-1}_p(\Omega)$. Последнее означает, что любое конечное число конечных особых точек при одной бесконечной с одним и тем же единственным спектральным параметром $\mu \in (0,\, 1)$ гасят взаимное влияние друг друга при значениях показателя $p \neq 2/(1\pm\mu)$.

Автор выражает глубокую признательность своему научному руководителю профессору Василию Николаевичу Денисову за внимание к работе и конструктивное обсуждение подходов к решению поставленной им залачи.

Литература

1. Боговский А. М., Денисов В. Н. О взаимодействии граничных особых точек в задаче Дирихле для эллиптического уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в плоской области. // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2019. Т 59, № 12, С. 2155–2174.
2. В. Н. Денисов, А. М. Боговский О взаимосвязи слабых решений эллиптических краевых задач Дирихле и Неймана для плоской односвязной области // Матем. заметки. 2020. Т 107, № 1, С.32–48.