

О сложности задачи о вершинной 3-раскраске для планарных графов с короткими гранями

Научный руководитель – Малышев Дмитрий Сергеевич

Сироткин Дмитрий Валерьевич

Студент (магистр)

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» - Нижний Новгород, Нижний Новгород, Россия
E-mail: dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

[usePics]lomonosov

О сложности задачи о вершинной 3-раскраске для планарных графов с короткими гранями Сироткин Д. В.

Сироткин Дмитрий Валерьевич Студент НИУ ВШЭ в Нижнем Новгороде Нижний Новгород Россия dvsirotkin@hse.ru

Задача о независимом множестве для заданного графа состоит в вычислении числа независимости графа — размера наибольшего множества его попарно несмежных вершин. *Задача о вершинной 3-раскраске* состоит для заданного графа в том, чтобы проверить, можно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Обе эти задачи являются классическими NP-полными задачами на графах.

Важным вопросом, возникающим при исследовании NP-полных задач на графах, является исследование вычислительной сложности (доказательства NP-полноты или построения полиномиальных алгоритмов) задач в различных классах графов. Одним из инструментов, используемых в данных исследованиях, являются преобразования графов. Примером такого преобразования может служить операция *смежностного поглощения*. А именно, если замкнутая окрестность вершины b включает замкнутую окрестность вершины a , то удаление b из графа сохраняет число независимости [1]. Подобные замены входят в некоторый класс локальных преобразований графов, которые были введены в работе [2]. Последовательное применение подобных преобразований позволяет определить сложностный статус задач о независимом множестве и вершинной 3-раскраске для определённых классов графов.

Известно, что задача о вершинной 3-раскраске NP-полна в классе планарных графов с максимальной степенью вершин 4 [3]. Известно также, что она является полиномиально разрешимой в классе планарных триангуляций и в классе графов со степенями всех вершин не более чем 3 [4]. Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором возникает NP-полнота, и при этом иметь графы с небольшими степенями вершин. В докладе будет представлен следующий результат:

Теорема 1.

Задача о вершинной 3-раскраске в классе плоских графов с максимальной степенью вершин не более чем 5, чьи грани — только треугольники и четырёхугольники, является NP-полной.

Доказательство данного результата проводится с использованием специальных локальных преобразований, разработанных для задачи о вершинной 3-раскраске. А именно, сначала каждая вершина произвольного планарного графа, т.е. заменяется на некоторый граф специального вида. Данная операция формирует внутреннюю структуру графа, а

именно, обеспечивает достаточно малые степени его вершин. Возможность провести дополнительные рёбра ввиду малости степеней вершин графа позволяет выполнить разбиение граней графа на части, ограниченные не более, чем четырьмя рёбрами.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проект номер № 18-31-20001-мол-а-вед, и гранта Президента РФ МД-879.2019.1.

Источники и литература

- 1) Алексеев В. Е. О сжимаемых графах // Проблемы кибернетики. 1979. Т. 36, С. 23–31.
- 2) Алексеев В. Е., Лозин В. В. О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости // Дискретный анализ и исследование операций. 1998. Т. 5, № 1. С. 3–19.
- 3) Dailey D. Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete // Discrete Mathematics. 1980. Т. 30, № 3. С. 289–293.
- 4) Aichholzer O., Aurenhammer F., Hackl T., Huemer C., Pilz A., Vogtenhuber B. 3-Colorability of pseudo-triangulations // International Journal of Computational Geometry and Applications. 2015 Т. 25, № 4. С. 283–298.