Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Оценка вклада отдельного фактора в общий риск портфеля для многомерного распределения с тяжелым хвостом

Чибиляев Василий Альбертович
Студент (магистр)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Факультет вычислительной математики и кибернетики, Кафедра математической статистики, Москва, Россия
E-mail: chibiliaev23@gmail.com

В нашем докладе рассматривается задача об оценке вклада в общий риск отдельной компоненты портфеля ценных бумаг в случае, когда совместное распределение всех компонент имеет многомерное распределение с тяжелым хвостом. Более точно мы исследуем ситуацию, когда хвост такого распределения правильно меняется, а компоненты вектора зависимы. Задачи такого типа сейчас очень популярны в финансовой математике.

Начнем с описания класса многомерных распределений, с которым мы будем работать. Случайный вектор $\vec{X} = (X_1, \dots, X_d)^T$ состоит из рисков ценных бумаг, входящих в рассматриваемый портфель. Мы предполагаем, что он представляет из себя сумму двух независимых векторов $\vec{Y_1}$ и $\vec{Y_2}$. Первый вектор отвечает за зависимость компонент риска, а второй обеспечивает тяжесть хвостов распределения. Предположим, что $\vec{Y_1}$ имеет многомерное нормальное распределение со средним $\vec{a} = (a_1, \dots, a_d)^T$ и матрицей ковариаций $\Sigma_1 = (\sigma_{ij}^{(1)})$, а вектор $\vec{Y_2}$ имеет симметричное многомерное эллиптически контурированное устойчивое распределение с параметром $\alpha : 1 < \alpha < 2$ $\Sigma_2 = (\sigma_{ij}^{(2)})$. В этом случае вектор $\vec{Y_2}$ допускает представление в следующем виде: $\vec{Y_2} = \sqrt{Z} \cdot \vec{W}$, где Z имеет одностороннее устойчивое распределение с параметром $\alpha/2$, $\vec{W}$ имеет многомерное нормальное распределение со средним ноль и матрицей ковариаций Σ_2, причем Z и $\vec{W}$ независимы между собой и от вектора $\vec{Y_1}$.

Фиксируем некоторое $k : 1 \leq k \leq d$. Обозначим через $S = X_1 + \ldots + X_d$ общий риск портфеля. Наша основная задача состоит в оценке величины

$$E(X_k|S > b)$$

при больших значениях величины b. Оказывается, что основной вклад вносит слагаемое с устойчивым распределением. А именно, имеет место следующая

Теорема 1. *. В рамках описанной выше модели при больших значениях величины b*

$$E(X_k|S > b) \sim a_k + \frac{\sigma_{S,k}}{\sigma_S^2} \cdot \frac{\alpha \cdot b - a_S}{\alpha - 1},$$

где

$$\sigma_{S,k} = \sum_{j=1}^{d} \sigma_{jk}^{(2)}, \sigma_S^2 = \sum_{i,j=1}^{d} \sigma_{ij}^{(2)}, a_S = a_1 + \ldots + a_d.$$

Источники и литература

1) Panjer, H. H. Measurement of Risk, Solvency Requirements, and Allocation of Capital within Financial Conglomerates. Institute of Insurance and Pension Research, University of Waterloo Research Report 01-15. (2002)

2) Landsman Z. and Valdes E. A. Tail Conditional Expectations for Elliptical Distributions. University of Haifa. Technical Report N 02-04, October 2002

3) Furman E. and Landsman Z. Economic Capital Allocation for Non-negative Portfolios of Dependent Risks. ASTIN Bulletin 38 (2), P. 601–619.

4) Asimit A. V., Furman E., Tang Q. and Vernic R. Asymptotics for risk capital allocations based on Conditional Tail Expectation. Insurance: Mathematics and Economics 49 (2011), P.,310–324.