Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Об оценивании индекса экстремального значения

Elizarova Anastasiia Evgenevna
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: elizarova.anastasiia@gmail.com

Классическая теория экстремумов сосредоточена на изучении свойств распределения максимума $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, где $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р. сл.в.), при больших значениях n. Центральным результатом данной теории является теорема об экстремальных типах, в окончательном виде доказанная Б.В. Гнеденко [2]. Теорема утверждает, что если для некоторых числовых последовательностей $a_n > 0,\ b_n$ функция распределения (ф.р.) нормированного максимума $a_n^{-1}(M_n - b_n)$ сходится к невырожденной ф.р. G, т.е.

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) \to G(x),\ n \to \infty, \tag{1}$$

то найдутся такие $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$ что $G(x) := G_\gamma(ax + b)$, где

$$G_\gamma(x) = \exp(-(1 + \gamma x)^{-1/\gamma}), \quad 1 + \gamma x > 0.$$

Функции G_γ при $\gamma = 0$, $\gamma > 0$, $\gamma < 0$ задают классы распределений Гумбеля, Фреше и Вейбулла соответственно. Если для ф.р. F выборки $X_1, \ldots, X_n$ выполнено (1) для некоторого γ, то говорят, что такая ф.р. принадлежит области максимального притяжения распределения G_γ, пишем $F \in D(G_\gamma)$. Оценивание параметра γ, называемого индексом экстремального значения, имеет ключевое значение для задач статистики экстремумов. Широко известны состоятельные оценки параметра γ (например, оценки Хилла [3] и Пикандса[4]). В настоящей работе приводится новая оценка γ, а также доказывается ее состоятельность. Рассмотрим статистику, введенную в работе [1],

$$R_{k,n}(a) = \ln(1 - F_a(X_{n-k})) - \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \ln(1 - F_a(X_{(i)})),$$

где $\{F_a, a \in A\}$ — некоторое параметрическое семейство ф.р., а $X_{(1)} \le \ldots \le X_{(n)}$ — вариационный ряд выборки $X_1, \ldots, X_n$. Выберем в качестве $\{F_a, a \in A\}$ семейство экстремальных распределений $\{G_\gamma, \gamma \in \mathbb{R}\}$ и определим оценку

$$\hat{\gamma} = arg\{R_{n,k}(\gamma) = 1\}.$$

Тогда верна следующая теорема

Теорема 1. *Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — н.о.р. сл.в. с ф.р. F. Пусть $F \in D(G_\gamma)$, где $\gamma \ge 0$. Тогда при $n \to \infty, k = k(n) \to \infty, k/n \to 0$ выполнено*

$$\hat{\gamma} \xrightarrow{P} \gamma.$$

Источники и литература

1) Родионов И.В. О различении классов хвостов распределений // Пробл. перед. инф., т. 54, в. 2, 2018, С. 29-44.
2) Gnedenko B.V. Sur la distribution limite du terme maximum d'une serie aleatoire // Ann. Math., 44 (1943), 423-453
3) Hill B. M. A simple general approach to inference about the tail of a distribution // Ann. Statist. 1975. 3. 1163–1174.
4) Pickands, J., III, Statistical Inference Using Extreme Order Statistics // Ann. Statist., 1975, vol. 3, no. 1, pp. 119–131.