Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Вопросы ограниченности при малом внешнем воздействии на бесконечную систему частиц

Научный руководитель – Малышев Вадим Александрович

Меликян М.В.[1], *Лыков А.А.*[2]

1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия, *E-mail: magaarm@list.ru*; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия, *E-mail: alekslyk@yandex.ru*

На прямой рассматривается бесконечная система точечных частиц единичной массы каждая $\ldots < x_{-1} < x_0 < x_1 < \ldots$, где $x_k(t)$ - траектория частицы с номером k. Потенциальная энергия взаимодействия имеет вид:

$$U(x_k, k \in \mathbb{Z}) = \frac{\omega_0^2}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k - ka)^2 + \frac{\omega_1^2}{2} \sum_{k\in\mathbb{Z}} (x_k - x_{k-1} - a)^2$$

где $a > 0$, $\omega_0 > 0$, $\omega_1 > 0$ - некоторые параметры. Подобная модель исследовалась ранее, см. $[1-4]$, однако основным отличием от рассматриваемой в этих работах модели является рассмотрение уже бесконечного числа частиц.

Предположим, что $x_k(0) = ka,\ \dot{x}_k(0) = 0,\ k \in \mathbb{Z}$, и что на частицу с номером 0 действует некоторая возмущающая сила $f(t)$, то есть имеет место система уравнений:

$$\frac{d^2}{dt^2} x_k(t) + \omega_0^2 (x_k(t) - ka) = \omega_1^2 (x_{k+1}(t) - 2x_k(t) + x_{k-1}(t)) + \delta_{0,k} f(t),\ k \in \mathbb{Z}$$

Обозначим отклонение частицы от положения равновесия как $y_k(t) = x_k(t) - ka$. Введем также обозначения для вектор-столбца $Y_k(t) = (y_k, \dot{y}_k)^T$ и матрицы $\mathcal{Y}_{k,n}(t) = E\{Y_k(t) Y_n^*(t)\}$.

Пусть внешняя сила $f(t) = X_t$ является стационарным в широком смысле процессом со спектральной плотностью g и ортогональной мерой M, то есть:

$$X_t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\nu} M(d\nu), E|M(d\nu)|^2 = g(\nu) d\nu.$$

Мы будем предполагать, что спектральная плотность удовлетворяет следующим условиям: 1). $\int_{\mathbb{R}} g(\nu) d\nu < \infty$; 2). $g \in C^1(\mathbb{R})$; 3). $g(\nu) = g(-\nu)$; 4). $\mathrm{supp(g)} \cap [\alpha,\ \beta] \subseteq \{\alpha,\ \beta\}$, где $\alpha = \omega_0, \beta = \sqrt{\omega_0^2 + 4\omega_1^2}$.

Теорема. Для любых фиксированных $k, n \in \mathbb{Z}$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \mathcal{Y}_{k,n}(t) = \mathcal{Y}_{k,n}, \lim_{t\to\infty} E y_k(t) = 0.$$

Источники и литература

1) Лыков А.А., Малышев В.А., Музычка С.А. Линейные гамильтоновы системы с микроскопическим случайным воздействием // Теория вероятностей и ее применения. 2012. Том 57, Выпуск 4. С. 794-799.

2) Lykov A.A., Malyshev V.A. Harmonic Chain with Weak Dissipation // Markov Processes and Related Fields 18. № 4. 2012. P. 721-729.

3) Lykov A.A., Malyshev V.A. Convergence to Gibbs Equilibrium - Unveiling the Mystery // Markov Processes and Related Fields 19. № 4. 2013. P. 643-666.
4) Lykov A.A., Malyshev V.A. Liouville ergodicity of linear multi-particle hamiltonian system with one marked particle velocity flips // Markov Processes and Related Fields 21, № 2, P. 381-412.