

Эллиптический бильярд в поле потенциальных сил: полная топологическая классификация

Научный руководитель – Фоменко Анатолий Тимофеевич

Кобцев Иван Федорович

Студент (специалист)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: *int396.kobtsev@mail.ru*

Рассматривается задача о движении материальной точки единичной массы в области, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1$, в силовом поле с потенциалом $V = \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{2x^2} + \frac{\beta}{2y^2}$. Эта механическая система является интегрируемой с интегралами

$$H = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\alpha}{2x^2} + \frac{\beta}{2y^2}$$

(полная энергия),

$$F = \frac{\dot{x}^2}{a} + \frac{\dot{y}^2}{b} + \frac{(\dot{x}y - \dot{y}x)^2}{ab} + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \left(-k + \frac{\alpha}{ax^2} + \frac{\beta}{by^2}\right)$$

(дополнительный интеграл).

Эти интегралы указаны В.В. Козловым в [1].

Интересные результаты получаются, если рассматривать эту механическую систему как гамильтонову. Полная интегрируемость системы приводит к новым топологическим аспектам задачи. В частности, корректно определено понятие слоения Лиувилля и лиувиллевой эквивалентности [2]. В данной задаче существует процедура, позволяющая значительно упростить топологический анализ.

Именно, уравнения движения системы можно привести к виду

$$\dot{\lambda}_i = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \sqrt{P(\lambda_i)}, \quad i = 1, 2,$$

где (λ_1, λ_2) — эллиптические координаты на плоскости, $-a \leq \lambda_2 \leq -b$, $-b \leq \lambda_1 \leq 0$, $P(\lambda_i)$ — многочлен с коэффициентами, зависящими от параметров a, b, k, α, β и от h, f — значений интегралов H и F соответственно.

Для задач, допускающих такое разделение переменных, в [3] приведен алгоритм, позволяющий установить типы интегральных поверхностей и их перестройки. Также описанным способом можно вычислять инварианты лиувиллевой эквивалентности (инварианты Фоменко–Цишанга) [2].

В ходе исследования рассмотрены все возможные варианты параметров задачи, перечислены области возможного движения точки, найдены бифуркационные диаграммы, построены изоэнергетические инварианты лиувиллевой эквивалентности. Также обнаружено сходство построенных инвариантов с полученными ранее при анализе других задач классической механики.

Источники и литература

- 1) Козлов В. В. Некоторые интегрируемые обобщения задачи Якоби о геодезических на эллипсоиде // Прикладная математика и механика, том 59, вып. 1, 1995.

- 2) Болсинов А. В., Фоменко А. Т. Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. 1,2. Ижевск:РХД, 1999.
- 3) Харламов М.П. Топологический анализ и булевы функции: I. Методы и приложения к классическим системам // Нелинейная динамика, 2010, Т.6, №4, с.769–805.