Секция «Геометрия и топология»

Собственные деиствия групп и вещественные момент-угол-многообразия

Научный руководитель – Панов Тарас Евгеньевич

Струментов Максим Андреевич
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва,
Россия
E-mail: strumentov.maksim@gmail.com

1. Предмет исследования

Пусть $V \cong \mathbb{R}^k$ - есть k-мерное векторное вещественное пространство, и $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ последовательность (*конфигурация*) m векторов в двойственном пространстве V^*. Предполагаем, что их выпуклая оболочка порождает все пространство V^*. Рассмотрим действие V на $\mathbb{R}^m$ заданное следующим образом.

$$\begin{aligned} V \times \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^m \\ (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}) &\mapsto \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{x} = \big(e^{\langle \gamma_1, \boldsymbol{v} \rangle} x_1, \ldots, e^{\langle \gamma_m, \boldsymbol{v} \rangle} x_m\big). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Это пример динамической системы, восходящей к работам Пуанкаре. Есть связь между линейными свойствами набора векторов Γ и топологией слоения $\mathbb{R}^m$ на орбиты действия (1.1) (*пространством листов*). В работе будут описана связь комбинаторной структуры Γ и топологией пространства листов.

2. Определения

Симплициальный комплекс на $[m]$ это набор $\mathcal{K}$ подмножеств $[m]$ т.ч. для каждого $I \in \mathcal{K}$ все подмножества I также принадлежат $\mathcal{K}$.

Многообразие $U(\mathcal{K})$ в $\mathbb{R}^m$, соответствующее симплициальному комплексу $\mathcal{K}$:

$$U(\mathcal{K}) = \mathbb{R}^m \setminus \bigcup_{\{i_1,\ldots,i_p\} \notin \mathcal{K}} \{\boldsymbol{x} \colon x_{i_1} = \cdots = x_{i_p} = 0\}. \tag{2.1}$$

Двойственным по Гейлу к конфигурации Γ называется такой набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$, что $\Gamma\mathrm{A}^* = 0$. В матричном виде это означает, что строки матрицы A есть линейные зависимости между векторами-столбцами в Γ.

Конусом σ на векторах $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p$ в линейном вещественном пространстве L называется подмножество, образованное всеми неотрицательными линейными комбинациями этого набора векторов.

$$\sigma = \operatorname{cone}(\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \boldsymbol{v}_i, \ \lambda_i \geq 0$$

Веером называется конечный набор конусов $\Sigma = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_s\}$ в L такой, что каждая грань конуса из Σ лежит в Σ, и пересечение любых двух конусов лежит в Σ. То есть это совокупность набора векторов $\{\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_m\}$, и симплициального комплекса $\mathcal{K}$ на $[m]$.

Нормальным веером простого многогранника называется веер, набор образующий которого есть набор векторов-нормалей к граням, симплициальным комплексом - граница двойственного многогранника.

3. Результаты

Теорема 1. *Многообразие $U(\mathcal{K})/V$ компактно тогда и только тогда, когда веер Σ полный.*

Теорема 2. *Если $\{\mathcal{K}, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ определяет полный симплициальный конус, имеет место гомеоморфизм*

$$U(\mathcal{K})/V \cong \mathcal{R}_{\mathcal{K}}.$$

Следствие 1. *Заметим, что теорема 2 индуцирует на $\mathcal{R}_{\mathcal{K}}$ гладкую структуру, если $\mathcal{K}$ - комплекс, соответствующий полному симплициальному вееру.*

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{K}$ симплициальный комплекс на множестве $[m]$, соответствующий границе некоторого симплициального многогранника. Набор векторов $\mathrm{A} = \{\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_m\}$ таков, что для каждого симплекса $I \in \mathcal{K}$ подмножество A_I линейно независимо. Положим $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$ двойственный по Гейлу набор векторов. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *Набор $\{\mathcal{K}, \mathrm{A}\}$ задает нормальный веер Σ некоторого многогранника;*

(b) $\bigcap_{I\in\mathcal{K}} \operatorname{relint} \operatorname{cone} \Gamma_{\widehat{I}} \neq \varnothing$.

4. Благодарности

Хочу выразить благодарность: Тарасу Евгеньевичу Панову, за помощь в написании работы и выверении текста. Дмитрию Семеновичу Улюмджиеву и Ивану Олеговичу Салтыкову, за содействие в поиске логических неточностей.

Список литературы

[BP1] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Torus actions, combinatorial topology and homological algebra*. Uspekhi Mat. Nauk **55** (2000), no. 5, 3–106 (Russian). Russian Math. Surveys **55** (2000), no. 5, 825–921 (English).

[L] Lee, John M. *Introduction to smooth manifolds*. Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013.

[BP2] Buchstaber, Victor; Panov, Taras. *Toric Topology*. Math. Surv. and Monogr., 204, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2015.