Секция «Геометрия и топология»

Полиэдральные произведения и соотношения в коммутанте прямоугольной группы Коксетера

Научный руководитель – Панов Тарас Евгеньевич

Ильясова Марина Фаридовна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей геометрии и топологии, Москва, Россия
E-mail: marina_ilyasova@bk.ru

Прямоугольные группы Коксетера играют важную роль в геометрической теории групп. С одной стороны, они являются частным случаем граф-произведения групп. Если $\mathbf{G} = (G_1, \ldots, G_m)$ и Γ — граф на m вершинах, то граф-произведение $\mathbf{G}^\Gamma$ определяется следующим образом

$$\mathbf{G}^\Gamma = \bigstar_{k=1}^m G_k / (g_i g_j = g_j g_i \ \text{ при } g_i \in G_i, g_j \in G_j, \{i,j\} \in \Gamma),$$

где $\bigstar_{k=1}^m G_k$ обозначает свободное произведение групп G_k. Прямоугольные группы Коксетера получаются при $G_k = \mathbb{Z}_2$. С другой стороны, эти группы интересны и с геометрической точки зрения, поскольку являются группами, порожденными отражениями в гипергранях многогранников с прямыми двугранными углами.

Коммутанты групп Коксетера являются фундаментальными группами конечномерных асферических пространств — вещественных момент-угол комплексов R_K, которые определяются так

$$R_K = (D^1, S^0)^K = \bigcup_{I \in K} (D^1, S^0)^I = \bigcup_{I \in K} \left(\prod_{i \in I} D^1 \times \prod_{i \notin I} S^0 \right).$$

Т. Панов и Я. Верёвкин получили критерий, показывающий, в каких случаях коммутант группы Коксетера является свободной группой. Нами был получен критерий, когда коммутант оказывается группой с одним соотношением. А именно, пусть K — флаговый симплициальный комплекс, т. е. такой комплекс, для которого любой набор вершин, попарно соединенных ребрами, является набором вершин некоторого симплекса. Тогда следующие условия эквивалентны:

а) $H_2(R_K) = \mathbb{Z}$;

б) Либо $K = p$-цикл для $p \geqslant 4$, либо $K = (p\text{-цикл}) * \Delta^q$ для некоторых $p \geqslant 4$ и $q \geqslant 0$.

в) $\pi_1(R_K)$ — группа с одним соотношением.

При выполнении любого из этих трёх условий имеем $H_k(R_K) = 0$ при $k \geqslant 3$.

Источники и литература

1) V. M. Buchstaber, T. E. Panov. *Toric Topology.* Mathematical Surveys and Monographs, vol.204, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

2) Т. Е. Панов, Я. А. Верёвкин. *Полиэдральные произведения и коммутанты прямоугольных групп Артина и Коксетера.* Мат. сборник 207 (2016), вып. 11, стр. 105-126.

3) А. Хатчер. *Алгебраическая топология.* Издательство МЦНМО, Москва, 2011.

4) E. Dyer, A. T. Vasquez. *Some small aspherical spaces.* J. Austral. Math. Soc., 1973, 16, p. 332-352.