

Алгоритм визуализации бифуркационной диаграммы одной интегрируемой задачи вихревой динамики

Научный руководитель – Рябов Павел Евгеньевич

Шадрин Артемий Александрович

Студент (бакалавр)

Финансовый университет, Факультет прикладной математики и информационных технологий, Кафедра прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: shadrin.art@gmail.com

В аналитической динамике вихревых структур особое место уделяется интегрируемым моделям точечных вихрей на плоскости. С другой стороны, исследования динамики вихрей, но уже в квантовой физике, показали, что квантовые вихри ведут себя примерно также, как тонкие вихревые нити, изучаемые в классической гидродинамике. Особое место при этом занимают вихревые структуры в бозе-эйнштейновском конденсате, полученном для ультрахолодных атомных газов. Современный обзор таких исследований представлен, например, в [1]. Математическая модель динамики двух вихревых нитей в бозе-эйнштейновском конденсате, заключенном в цилиндрической ловушке, рассмотрена в [2]. Такая модель приводит к вполне интегрируемой по Лиувиллю гамильтоновой системе с двумя степенями свободы:

$$\Gamma_k \dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}(z_1, z_2); \quad \Gamma_k \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}(z_1, z_2), \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где гамильтониан H имеет вид:

$$H = \Gamma_1^2 \ln(1 - |z_1|^2) + \Gamma_2^2 \ln(1 - |z_2|^2) - \Gamma_1 \Gamma_2 c \ln(|z_1 - z_2|^2).$$

Здесь через $z_k = x_k + iy_k$ обозначены декартовы координаты k -ого вихря ($k = 1, 2$) с интенсивностями Γ_k . Физический параметр “ c ” характеризует меру вихревого взаимодействия интенсивностей [2], [3]. Фазовое пространство \mathcal{P} задается в виде прямого произведения двух открытых кругов радиуса 1 с выколотым множеством столкновений вихрей. Система (1) допускает один дополнительный первый интеграл движения – *момент завихренности*:

$$F = \Gamma_1 |z_1|^2 + \Gamma_2 |z_2|^2. \quad (2)$$

Функция F вместе с гамильтонианом H образуют на \mathcal{P} полный инволютивный набор интегралов системы (1). Согласно теореме Лиувилля-Арнольда регулярная поверхность уровня первых интегралов вполне интегрируемой гамильтоновой системы представляет собой несвязное объединение торов, заполненных условно-периодическими траекториями. Определим *интегральное отображение* $\mathcal{F} : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}^2$, полагая $(f, h) = \mathcal{F}(\mathbf{x}) = (F(\mathbf{x}), H(\mathbf{x}))$. Обозначим через \mathcal{C} совокупность всех критических точек отображения момента, то есть точек, в которых $\text{rank } d\mathcal{F}(\mathbf{x}) < 2$. Множество критических значений $\Sigma = \mathcal{F}(\mathcal{C} \cap \mathcal{P})$ называется *бифуркационной диаграммой*. Наличие интеграла момента завихренности (2) позволяет выполнить редукцию к системе с одной степенью свободы и наблюдать бифуркацию трёх торов в один [4].

В докладе предложен алгоритм визуализации бифуркационной диаграммы Σ и самих бифуркаций лиувиллевых торов с использованием *Python* и возможностей *Jupyter Notebook*, начиная с аналитических преобразований, выбора начальных данных, применения

численных методов и заканчивая программированием самой интерактивной бифуркационной диаграммы.

Автор выражает благодарность научному руководителю, д.ф.-м.н., профессору П. Е. Рябову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Источники и литература

- 1) A.L. Fetter. Rotating trapped Bose-Einstein condensates // Rev. Mod. Phys., 2009. Vol. 81, No. 2, V. 81. P. 647-691.
- 2) P. J. Torres, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, R. Carretero-Gonzalez, P. Schmelcher, D. S. Hall. Dynamics of vortex dipoles in confined Bose-Einstein condensates // Phys. Lett. A. 2011. Vol. 375. P. 3044-3050.
- 3) R. Navarro, R. Carretero-Gonzalez, P. J. Torres, P. G. Kevrekidis, D. J. Frantzeskakis, M. W. Ray, E. Altuntas, and D. S. Hall. Dynamics of Few Co-rotating Vortices in Bose-Einstein Condensates // Phys. Rev. Lett. 2013. Vol. 110, no. 22. P. 225301-6.
- 4) П. Е. Рябов. Бифуркации торов Лиувилля в системе двух вихрей в Бозе-Эйнштейновском конденсате, имеющих положительные интенсивности // Доклады РАН (в печати).