Секция «Геометрия и топология»

Проблема Штейнера в пространствах с еклидово инвариантной метрикой Громова-Хаусдорфа

Научный руководитель – Тужилин Алексей Августинович

Малышева Ольга Сергеевна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальной геометрии и приложений, Москва, Россия
E-mail: osm95@mail.ru

Пусть M обозначает метрическое пространство с функцией расстояния d, $\mathcal{P}(M)$ — семейство непустых подмножеств M, а $\mathcal{H}(M)$ — семейство непустых замкнутых ограниченных подмножеств M. Обозначим через G группу движений в ^{n}, сохраняющих ориентацию. В частности, будем рассматривать $\mathcal{H}(^n)$ с введенной на нем эквивалентностью ν: два элемента будем считать эквивалентными, если один из другого получается движением $O \in G$. Обозначим через $\mathcal{H}_o(^n)$ пространство таких классов эквивалентности.

Определение 1. Пусть A и B — элементы $\mathcal{P}(M)$. *Расстоянием по Хаусдорфу* между этими множествами называется величина

$$d_H(A,B) = \inf\Big\{r : \big(A \subseteq B_r(B)\big) \wedge \big(B \subseteq B_r(A)\big)\Big\}.$$

Определение 2. *Расстоянием в евклидово инвариантной метрике Громова–Хаусдорфа* между A и B называется величина

$$\mathrm{d}_{EGH}(A,B) = \inf_O \Big\{\mathrm{d}_H(A, OB)\Big\},$$

где O — движение пространства, сохраняющее ориентацию.

Определение 3. Движение O, на котором достигается $d_{EGH}(A,B)$, будем называть *оптимальным*, а пару (A, OB) — *оптимальным взаимным расположением.*

Пусть M — конечное множество, а $G = (V,E), V \subset X$ — некоторый связный граф. Будем говорить, что G *соединяет* M, если $M \subset V$. M называется *границей* всех графов, соединяющих M. *Точкой Штейнера* для трехточечной границы A_1, A_2, A_3 называется такая точка S, что $\sum_{i=1}^{3} d(A_i, S)$ минимально.

Пусть $\mathcal{M} = (M, \sum$ — конечное псевдометрическое пространство, $G = (V,E)$ — граф, соединяющий M, и ω $E \to \mathcal{R}_+$ — некоторое отображение, называемое *весовой функцией* и порождающее взвешенный граф $\mathcal{G} = (G,\omega)$. Функция ω порождает псевдометрику d_ω на V: *Расстоянием между вершинами* $\mathcal{G}$ называется минимальный вес путей, соединяющих эти вершины. Взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением пространства* $\mathcal{M}$, если для любых точек p, $q \in M$ имеем $\rho(p,q) \le d_\omega(p,q)$. *Минимальным заполнением* называется заполнение $\mathcal{G}_0$ такое, что $\omega(\mathcal{G}_0) = \inf_{\mathcal{G}} \omega(\mathcal{G})$.

Пространство всех компактных подмножеств ^{n} с метрикой Хаусдорфа является ограниченно компактным.

Теорема 1. *Пусть A — это r_A-окрестность отрезка $[A_1, A_2]$ длины a, а B — это r_B-окрестность отрезка $[B_1, B_2]$ длины b. Тогда $d_{EGH}(A, B) = \max\left\{|r_A - r_B|, |\frac{b}{2} - \frac{a}{2} + r_B - r_A|\right\}$.*

Рассмотрим следующие компакты A, B, C; пусть даны отрезки длины $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ и рассматриваются их $r_A \geq 0, r_B \geq 0, r_C \geq 0$-окрестности соответственно.

Теорема 2. *Для описной выше границы $\mathcal{M} := \left\{[A], [B], [C]\right\} \subset \mathcal{H}_o(^n)$ существует такой $[S] \in \mathcal{H}_o(^n)$, что звезда с центром в S и граничными вершинами $[A], [B]$ и $[C]$ является минимальным заполнением. В частности, такие $[S]$ представляют собой точки Штейнера для границы $\mathcal{M}$.*