Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Об асимптотической устойчивости решений интегродифференциальных уравнений, возникающих при изучении флаттера вязкоупругой пластины.

Научный руководитель – Власов Виктор Валентинович

Давыдов Александр Вадимович

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра математического анализа, Москва, Россия

E-mail: esse101@yandex.ru

В данном докладе мы рассмотрим интегродифференциальное уравнение

$$\frac{d^2}{dt^2}u(t)+M_1\frac{d}{dt}u(t)+M_2\left(A^2u(t)-\int\limits_0^t\Gamma(t-\tau)A^2u(\tau)d\tau\right)+M_3Tu(t)=f(t), \tag{1}$$

где $M_1,\ M_2,\ M_3$ — некоторые константы, $\Gamma(t)$ — интегрируемая функция, а $u(t)$ и $f(t)$ при фиксированном t — это векторные функции со значениями в гильбертовом пространстве H. Оно применяется для исследования движения вязкоупругой пластины в потоке жидкости или газа в рамках поршневой модели (см. напр. [1]).

Это — уравнение Гуртина-Пипкина с небольшой модификацией в виде членов $M_1\frac{d}{dt}u(t)$ и $M_3Tu(t)$. Без этих добавок уравнение подробно изучено в [2].

Мы накладываем дополнительное условие: $\int\limits_0^\infty\Gamma(t)dt<1$. Это требование необходимо, чтобы решения уравнения были устойчивы.

Добавив к уравнению (1) начальные условия

$$u(0)=\varphi_0,\quad u'(0)=\varphi_1, \tag{2}$$

мы получим задачу Коши.

Оператор A^2 в нашем случае является самосопряженным положительным оператором, а оператор A^{-2}, обратный к нему, является компактным. Оператор T представим в виде $T=UA^{1/2}$.

Применение преобразования Лапласа к уравнению (1) приводит нас к оператор-функции

$$L(z)=z^2I+M_1z+M_2(1-K(z))A^2+M_3T, \tag{3}$$

которая является символом исходного уравнения. Здесь $K(z)$ – преобразование Лапласа функции $\Gamma(t)$.

Определение. *Резольвентным множеством* $R(L)$ оператор-функции $L(z)$ будем называть множество всех значений $z\in\mathbb{C}$, для которых оператор-функция $L^{-1}(z)$ существует и ограничена. Дополнение множества $R(L)$ в комлексной плоскости, т.е., $\sigma(L)=\{\mathbb{C}\setminus R(L)\}$, будем называть *спектром* оператор-функции $L(z)$. Кроме того, если спектр (3) отделен от полуплоскости $\{\mathrm{Re}\ z\geq 0\}$ (т. е. расстояние между этими множествами больше нуля), мы будем говорить, что решения задачи Коши (1),(2) *асимптотически устойчивы.*

Введем обозначение $p(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}M_1M_2(1-D)x^3-M_3\sqrt{M_2}x-M_1M_3$, где $D\stackrel{\mathrm{def}}{=}\int\limits_0^\infty\Gamma(t)dt$. Сформулируем основную теорему об асимптотической устойчивости решений:

Теорема 1. *Предположим, что* $\Gamma(t)e^{\gamma_1 t}$ *— монотонно убывающая положительная интегрируемая функция для некоторого* $\gamma_1>0$ *и* $p(\sqrt{a_1})>0$, *где* a_1 *— наименьшее собственное значение* A, *тогда для некоторого* $\gamma>0$ *в правой полуплоскости* $\{\mathrm{Re}\ z\geq-\gamma\}$ *отсутствует спектр операторной функции* $L(z)$, *являющейся символом уравнения* (1). *Следовательно, решения* (1)–(2) *асимптотически устойчивы.*

Источники и литература

1) Алгазин С.Д., Кийко И.А. Флаттер пластин и оболочек, М. : Наука, 2006. — 247 с. — ISBN 5-02-033983-0.
2) Власов В. В., Раутиан Н. А., “Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений”, Тр. сем. им. И. Г. Петровского, 28, Изд-во Моск. ун-та, М., 2011, 75–113; J. Math. Sci. (N. Y.), 179:3 (2011), 390–414