Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

О единственности продолжения одной функции до положительно определённой

Научный руководитель – Заставный Виктор Петрович

Манов Анатолий Дмитриевич

Аспирант

Донецкий национальный университет, Факультет математики и информационных технологий, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецк, Украина

E-mail: manov.ad@ro.ru

Комплекснозначная функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f\in\Phi(\mathbb{R})$), если для любого $n\in\mathbb{N}$, и для любых точек $\{x_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{R}$, а также для любого набора комплексных чисел $\{c_i\}_{i=1}^n\subset\mathbb{C}$ выполнено неравенство

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i\overline{c_j}f(x_i-x_j)\geqslant 0. \tag{1}$$

Обозначим символом $\mathfrak{F}$ множество функций $\varphi\in\Phi(\mathbb{R})\cap C(\mathbb{R})$ таких, что $\operatorname{supp}\varphi\subset[-1,1]$ и $\varphi(0)=1$. Несложно проверить, что следующая функция принадлежит классу $\mathfrak{F}$:

$$(1-|x|)_+=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\frac{\sin^2(t/2)}{(t/2)^2}e^{itx}dt,\ x\in\mathbb{R}.$$

В 1940 году М. Г. Крейн [1] доказал, что непрерывную функцию f определённую в интервале $(-a,a)$, $a>0$ можно продолжить до положительно определённой функции на $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда f положительно определена на интервале $(-a,a)$, т. е. неравенство (1) выполняется для любых $x_1,\dots,x_n\in(-a/2,a/2)$. Кроме того, М. Г. Крейн показал, что функцию $1-|x|$, $|x|<a$ можно продолжить до положительно определённой на $\mathbb{R}$ $\iff$ $0<a\leqslant 2$ и она имеет единственное продолжение лишь в случае $a=2$.

Рассматривается следующая задача. Пусть $\varphi\in\mathfrak{F}$ и $a\in(0,1]$. Требуется найти все такие a, что из $\varphi(x)=1-|x|$, $|x|\leqslant a$ вытекает, что $\varphi(x)=(1-|x|)_+$, $x\in\mathbb{R}$.

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1.
1) *Пусть* $a\in[1/2,1]$ *и* $\varphi\in\mathfrak{F}$. *Если* $\operatorname{Re}\varphi(x)=1-|x|$ *при* $|x|\leqslant a$, *то* $\varphi(x)=(1-|x|)_+$, $x\in\mathbb{R}$.
2) *Пусть* $a\in(0,1/2)$. *Тогда найдётся такая функция* $\varphi\in\mathfrak{F}$, *что* $\varphi(x)=1-|x|$ *при* $|x|\leqslant a$, *но* $\varphi(x)\not\equiv(1-|x|)_+$.

Источники и литература

1) Крейн М. Г. О проблеме продолжения эрмитово положительных непрерывных функций // Доклады АН СССР. 1940. Т. 26, № 1. С. 17—20.