Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Методы аналитического продолжения для решения эволюционных дифференциальных уравнений

Научный руководитель – Смолянов Олег Георгиевич

Лобода Артём Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра теории функций и функционального анализа, Москва, Россия
E-mail: orion1312@yandex.ru

Рассмотрим рандомизиованную формулу Фейнмана-Каца

$$\Psi_\omega(t)(q) = \int \exp\left\{\int_0^t \alpha V(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\} \times \\ \times \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))dB_\omega(t)\right\}\varphi_0(q+\xi(t))w_{0t}^\alpha(d\xi), \quad (1)$$

которая является представлением решения задачи Коши для уравнения теплопроводности:

$$d\Psi_\omega(t)(q) = \alpha\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2}dt + \left(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right)\Psi_\omega(t)(q)dt + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \\ \Psi_\omega(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot), \quad (2)$$

где функция $\varphi_0(\cdot) \in C_b(\mathbb{R}^1),\ \alpha \in \mathbb{C}\backslash\{0\},\ \mathrm{Re}\alpha \geq 0$.

Применяя равенство Парсеваля, для этой задачи Коши можно получить представление Маслова-Чеботарева с помощью интеграла по обобщенной мере Пуассона, а затем, пользуясь аналитическим продолжением по параметру, для задачи Коши, соответствующей стохастическому уравнению Шрёдингера

$$d\Psi_.(t)(q) = \left(\alpha\frac{d^2\Psi_.(t)(q)}{dq^2} + \left(\alpha V(q) - \frac{\lambda}{4}|q|^2\right)\right)\times\Psi(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_.(t)(q)dw(t), \Psi(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot), \quad (3)$$

мы получаем представление решения с помощью функционального интеграла по обобщенной мере Фейнмана:

$$\Psi(t,\omega)(q) = \int \exp\left\{\int_0^t iV(q+\xi(\tau))d\tau - \int_0^t \frac{\lambda}{2}(q+\xi(\tau))^2 d\tau\right\} \times \\ \times \exp\left\{\sqrt{\frac{\lambda}{2}}\int_0^t (q+\xi(\tau))dw(\tau)\right\}\varphi_0(q+\xi(\tau))F(d\xi), \quad (4)$$

где $\alpha = i$.

В случае аналитического продолжения (1) по аргументу, в формуле Фейнмана-Каца появится уже функциональный интеграл по мере Винера, то есть для задачи Коши

$$d\Psi_\omega(t)(q) = \left(i\frac{d^2\Psi_\omega(t)(q)}{dq^2} + \left(iV(q) - \frac{\lambda}{4}q^2\right)\right) \times$$

$$\times\, \Psi_\omega(t)(q) + \sqrt{\frac{\lambda}{2}}q\Psi_\omega(t)(q)dB_\omega(t), \Psi\omega(0,\cdot) = \varphi_0(\cdot) \quad (5)$$

решение будет выглядеть так:

$$\Psi(t,q_1) = \int \exp\left\{\int_0^t iV(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})d\tau + \int_0^t -i\frac{\lambda}{4}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})^2 d\tau\right\} \times$$

$$\times \exp\left\{\int_0^t i\sqrt{\frac{\lambda}{2}}(q_1 + \frac{\xi_1(\tau)}{\sqrt{-i}})dB_\omega(\tau)\right\}\varphi_0(q_1 + \frac{1}{\sqrt{-i}}\xi_1(t))wf^{-1}(d\xi_1). \quad (6)$$

Интересно также обратить внимание на связь между разными представлениями решения одной и той же задачи Коши, так как в (3) фигурирует обобщенная мера Фейнмана, а в (6) - мера Винера.

Источники и литература

1) А. А. Лобода Метод Ито доказательства формулы Фейнмана-Каца для евклидова аналога стохастического уравнения Шрёдингера Дифференциальные уравнения 54 4 2018 561–564
2) О. Г. Смолянов, Е. Т. Шавгулидзе Континуальные интегралы Второе издание М.УРСС УРСС 2015
3) H. Doss Sur une Resolution Stochastique de l’Equation de Schr$\ddot{o}$dinger a Coefficients Analytiques Communications in Mathematical Physics 73 247–264 1980
4) Белавкин В. П., Смолянов О. Г.Интеграл Фейнмана по траекториям, соответствующий стохастическому уравнению Шрёдингера Докл. РАН. 1998. Т. 360. №5. С. 258-267.