Секция «Математическая логика, алгебра и теория чисел»

Граф ортогональности алгебры седенионов

Научный руководитель – Гутерман Александр Эмилевич

Жилина Светлана Александровна
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра высшей алгебры, Москва, Россия
E-mail: zhilina0sveta@gmail.com

Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра, $Z^*(\mathcal{A})$ — множество нетривиальных двусторонних делителей нуля в $\mathcal{A}$. Особый интерес для изучения представляют графы ортогональности различных алгебр, в частности, неассоциативных. Они определяются следующим образом ([1]):

Графом ортогональности $\Gamma_O(\mathcal{A})$ алгебры $\mathcal{A}$ называют граф, множеством вершин которого является $Z^*(\mathcal{A})$, причём две различные вершины a и b соединены ребром, если и только если $ab = ba = 0$.

Введём также обозначения: $\mathbb{O}$ — алгебра октонионов с порождающими $\{1, e_1, \ldots, e_7\}$, $\mathbb{S}$ — алгебра седенионов с порождающими $\{1, e_1, \ldots, e_{15}\}$.

В [2] описаны все делители нуля $\mathbb{S}$ вида $\pm e_i \pm e_j$ и доказано, что для них всегда выполнено $i \in \{1, 2, \ldots, 7\}$, $j \in \{9, 10, \ldots, 15\}$.

В [3] показано, что для $a, b \in \mathbb{S}$ из $ab = 0$ следует $ba = 0$. Кроме того, описаны необходимые и достаточные условия ортогональности элементов в $\mathbb{S}$.

В рамках данной работы получена следующая теорема:

Теорема 1. *Диаметр каждой компоненты связности* $\Gamma_O(\mathbb{S})$ *равен 3. Обхват* $\Gamma_O(\mathbb{S})$ *равен 4.*

Доказательство этой теоремы основано на следующем результате:

Лемма 1. *Пусть* $(a+be_8)(c+de_8) = 0$, *где* $a+be_8, c+de_8 \neq 0$, $n(a+be_8) = n(c+de_8) = \sqrt{2}$, $a, b, c, d \in \mathbb{O}$. *Тогда существует автоморфизм* $\mathbb{O}$, *при котором*

$$e_1 \mapsto a,\ e_2 \mapsto c,\ e_4 \mapsto b,\ e_7 \mapsto d.$$

При дополнительном условии, что $e_8 \mapsto e_8$, *этот автоморфизм* $\mathbb{O}$ *порождает единственный автоморфизм* $\mathbb{S}$, *причём*

$$e_1 + e_{12} \mapsto a + be_8,\ e_2 + e_{15} \mapsto c + de_8.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 17-11-01124.

Источники и литература

1) Б. Р. Бахадлы, А. Э. Гутерман, О. В. Маркова, *Графы, определенные ортогональностью* // Численные методы и вопросы организации вычислений. XXVII, Зап. научн. сем. ПОМИ, 428, ПОМИ, СПб., 2014, 49–80; J. Math. Sci. (N. Y.), 207:5 (2015), 698–717

2) Raoul E. Cawagas, *On the structure and zero divisors of the Cayley-Dickson sedenion algebra* // Discussiones Mathematicae. General Algebra and Applications. 24 (2004), 251-265.

3) K. Imaeda, M. Imaeda, *Sedenions: Algebra and Analysis* // Applied Mathematics and Computations, Vol. 115, No. 2-3, 2000, pp. 77-88.