Секция «Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Одно обобщение задачи о положительной определенности кусочно-линейной функции

Научный руководитель – Заставный Виктор Петрович

Манов Анатолий Дмитриевич

Студент (магистр)

Донецкий национальный университет, Факультет математики и информационных технологий, Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений, Донецк, Украина

E-mail: manov.ad@ro.ru

Функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ называется положительно определённой на $\mathbb{R}$ ($f\in\Phi(\mathbb{R})$), если при любом $n\in\mathbb{N}$, для любого набора точек $\{x_k\}_{k=1}^n\subset\mathbb{R}$ и любых комплексных чисел $\{c_k\}_{k=1}^n\subset\mathbb{C}$ выполняется неравенство $\sum\limits_{k,j=1}^n c_k\overline{c_j}f(x_k-x_j)\geqslant 0$. Рассматривается следующая задача. Для заданных $\alpha,\beta\in(0,1)$, $0<\alpha\leqslant\beta<1$ и $s\in\mathbb{R}$ чётную функцию $w_{\alpha,\beta,s}$ определим следующим образом: $w_{\alpha,\beta,s}(x)=0$ при $x>1$, $w_{\alpha,\beta,s}(0)=1$, $w_{\alpha,\beta,s}(1)=0$, $w_{\alpha,\beta,s}(x)=s$ при $x\in[\alpha,\beta]$ ($[\alpha,\alpha]:=\{\alpha\}$), а на отрезках $[0,\alpha]$ и $[\beta,1]$ функция $w_{\alpha,\beta,s}$ является линейной. Для каждой фиксированной пары $\alpha,\beta\in(0,1)$, $0<\alpha\leqslant\beta<1$ требуется найти множество всех $s\in\mathbb{R}$, для которых $w_{\alpha,\beta,s}\in\Phi(\mathbb{R})$.

Если $\alpha=\beta$, то это задача Р. М. Тригуба, которая была рассмотрена и решена В. П. Заставным и А. Д. Мановым в [1]. Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\alpha,\beta\in(0,1)$, $0<\alpha\leqslant\beta<1$ и $s\in\mathbb{R}$. Тогда $w_{\alpha,\beta,s}\in\Phi(\mathbb{R})\iff m(\alpha,\beta)\leqslant s\leqslant M(\alpha,\beta)$, где*

$$M(\alpha,\beta):=\frac{1-\beta}{1-\beta-\alpha\mathfrak{m}_1\left(\frac{1+\beta}{\alpha},\frac{1-\beta}{\alpha}\right)},\ m(\alpha,\beta):=\frac{1-\beta}{1-\beta-\alpha\mathfrak{m}_2\left(\frac{1+\beta}{\alpha},\frac{1-\beta}{\alpha}\right)},\tag{1}$$

а $\mathfrak{m}_1(\nu_1,\nu_2)$ и $\mathfrak{m}_2(\nu_1,\nu_2)$, $\nu_1,\nu_2>0$ определяются следующим образом:

$$\mathfrak{m}_1(\nu_1,\nu_2):=\inf_{\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}}\frac{\sin(\nu_1 t)\sin(\nu_2 t)}{\sin^2(t)},\ \mathfrak{m}_2(\nu_1,\nu_2):=\sup_{\mathbb{R}\setminus\pi\mathbb{Z}}\frac{\sin(\nu_1 t)\sin(\nu_2 t)}{\sin^2(t)}.\tag{2}$$

Кроме того,

1) *если $(1+\beta)/\alpha,(1-\beta)/\alpha\in\mathbb{N}$ или $1/\alpha\notin\mathbb{N}$, $\beta/\alpha\in\mathbb{N}$, то $M(\alpha,\beta)>0$, а в остальных случаях $M(\alpha,\beta)=0$;*
2) *если $(1+\beta)/\alpha,(1-\beta)/\alpha\in\mathbb{N}$ или $1/\alpha\in\mathbb{N}$, $\beta/\alpha\notin\mathbb{N}$, то $m(\alpha,\beta)<0$, а в остальных случаях $m(\alpha,\beta)=0$.*

Кроме того, найден явный вид величин $\mathfrak{m}_1(\nu_1,\nu_2)$, $\mathfrak{m}_2(\nu_1,\nu_2)$ для некоторых ν_1 и ν_2. С помощью Теоремы 1 получен критерий вполне монотонности рациональных функций специального вида.

Источники и литература

1) Manov A., Zastavnyi V. Positive definiteness of piecewise-linear function // Expo. Math. 2017. Vol. 35. P. 357-361.