Секция «Логика»

**Нормализация в натуральном исчислении классической логики высказываний**

**Научный руководитель – Шангин Василий Олегович**

***Пыльцин Артур Витальевич***
*Студент (бакалавр)*
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия
*E-mail: artur.pyltsin@gmail.com*

Теорема о нормальных выводах для натурального исчисления классической логики высказываний имеет столь же важное значение, как Основная теорема Генцена для исчисления секвенций – прежде всего, в силу своей фундаментальности, относительной простоты формулировки и предоставляемых возможностей для анализа структуры логических выводов. В этом докладе будет проведен анализ натурального исчисления генценовского типа $\mathbb{CL}$ с точки зрения принципа инверсии, рассмотрено доказательство теоремы о нормальных выводах для такого исчисления и сформулированы некоторые интересные следствия из нее.

Зададим язык $L$, который в дальнейшем будем использовать для построения $\mathbb{CL}$. Алфавит (с добавлением константы абсурда $\perp$), понятия формулы и подформулы определим стандартно. В дальнейшем договоримся опускать внешние скобки при записи формул. Запись $\neg A$ будем считать синтаксическим сокращением записи $A \supset \perp$.

Зададим правила вывода в $\mathbb{CL}$:

$$\&_{\mathbf{в}} \quad \frac{A \quad B}{A\&B} \qquad \&_{\mathbf{и}} \quad \frac{A\&B}{A} \; \frac{A\&B}{B}$$

$$\vee_{\mathbf{в}} \quad \frac{A}{A \vee B} \; \frac{B}{A \vee B} \qquad \vee_{\mathbf{и}} \quad \frac{A \vee B \quad \begin{matrix}(A)\\ C\end{matrix} \quad \begin{matrix}(B)\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$\supset_{\mathbf{в}} \quad \frac{\begin{matrix}(A)\\ B\end{matrix}}{A \supset B} \qquad \supset_{\mathbf{и}} \quad \frac{A \quad A \supset B}{B}$$

$$\perp_{\mathbf{c}} \quad \frac{\begin{matrix}(\neg A)\\ \perp\end{matrix}}{A}$$

Условимся называть формулу $A$ в правиле $\supset_{\mathbf{и}}$ и формулу $C$ в правиле $\vee_{\mathbf{и}}$ меньшими посылками данных правил. Посылку, не являющуюся меньшей, будем называть большей. Выводы в $\mathbb{CL}$ представлены в древесной форме.

Очевидно, что для каждой формулы, являющейся заключением правила введения (одного из правил $\&_{\mathbf{в}}$, $\vee_{\mathbf{в}}$, $\supset_{\mathbf{в}}$) существует достаточное условие ее получения. Также ясно, что правила исключения суть инверсии соответствующих правил введения, то есть применение правила исключения восстанавливает информацию, установленную, когда большая посылка этого правила была получена с помощью соответствующего правила введения. Такая корреляция была сформулирована в принципе инверсии и соответствующей теореме.

Будем называть максимальной формулой в выводе $\Pi$ вхождение формулы в $\Pi$, являющееся заключением правила введения или $\perp$-правила и большей посылкой правила исключения.

Пусть $\Pi$ является выводом $E$ из $\Gamma$, в котором имеется вхождение формулы $F$, являющееся заключением применения правила введения и большей посылкой применения правила исключения. $\Pi^*$ будем называть редукцией $\Pi$ по $F$, если $\Pi^*$ порождается из $\Pi$ удалением $F$. Легко видеть, что $\Pi^*$ также является выводом из $\Gamma$.

Рассмотрим систему $\mathbb{CL}^*$, получаемую из $\mathbb{CL}$ удалением $\vee$-правил. Дизъюнкцию формул в $\mathbb{CL}^*$ определим как $A \vee B \equiv_{Df} \neg A \supset B$. Очевидно, что $\vee$-правила в $\mathbb{CL}^*$ являются производными. Следовательно, $\mathbb{CL}^*$ адекватна $\mathbb{CL}$. Вывод в $\mathbb{CL}^*$, не содержащий максимальной формулы, будем называть нормальным. Сформулируем Теорему о нормальных выводах:

**Теорема 1.** *Если* $\Gamma \vdash_{\mathbb{CL}^*} A$, *то в* $\mathbb{CL}^*$ *существует нормальный вывод из* $\Gamma$.

В докладе будут рассмотрены различные формулировки и подходы к доказательству этой теоремы – прежде всего в трактовках таких исследователей как Д. Правиц [1], Г. Штолмарк [3] и Э. Циммерманн [2].

Наиболее интересным следствием из Теоремы 1 представляется принцип подформульности: каждое вхождение формулы в нормальный вывод из $\Gamma$ в $\mathbb{CL}^*$, за исключением допущений, закрываемых применением $\bot_{\mathbf{C}}$-правила, и вхождений константы $\bot$, расположенных непосредственно под этими допущениями, имеет вид подформулы или некоторой формулы из $\Gamma$.

### Источники и литература


1) Правиц Д. Натуральный вывод. Теоретико-доказательственное исследование/ Пер. с англ. П. Быстрова – М.: «Лори», 1997.
2) E. Zimmermann. Peirce's Rule in Natural Deduction. – Theoretical Computer Science 275: 561–574 (2002).
3) G. Stålmarck. Normalization Theorems for Full First Order Classical Natural Deduction. – J. Symb. Log. 56(1): 129-149 (1991).
4) J. P. Seldin. On the proof theory of the intermediate logic MH . – The Journal of Symbolic Logic, 51: 626-647 (1986).