Секция «Логика»

Натуральное исчисление для логики Гейтинга

Петрухин Ярослав Игоревич

Студент (бакалавр)

Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Философский факультет, Кафедра логики, Москва, Россия

E-mail: y1y2_yn@mail.ru

Формулируется натуральное исчисление[1], аксиоматизирующее трёхзначную логику[2] А. Гейтинга $\mathbf{G_3}$, впервые появившуюся в его статье [3].
Логической матрицей для $\mathbf{G_3}$ является $\mathfrak{M}_{G_3} = \{\{1, 1/2, 0\}, \neg, \supset, \vee, \wedge, \{1\}\}^3$.

A	$\neg$
1	0
1/2	0
0	1

$\supset$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1	1	0
0	1	1	1

$\vee$	1	1/2	0
1	1	1	1
1/2	1	1/2	1/2
0	1	1/2	0

$\wedge$	1	1/2	0
1	1	1/2	0
1/2	1/2	1/2	0
0	0	0	0

Следует сказать, что $\mathbf{G_3}$ — исторически первая суперинтуиционисткая логика. Она верифицирует все аксиомы и правила вывода пропозиционального интуиционистского гильбертовского исчисления **Int**, а также формулу $(\neg A \supset B) \supset (((B \supset A) \supset B) \supset B)$, добавление которой к **Int**, как показал Я. Лукасевич [6], дает адекватную аксиоматизацую $\mathbf{G_3}$. Кроме того, $\mathbf{G_3}$ появляется в статье К. Гёделя [2] при доказательстве нетабличности **Int** и существования счетно-бесконечной последовательности логик $\mathbf{G_3}$,...,$\mathbf{G_n}$, ... между **Int** и классической логикой; а также в работе С. Яськовского [4] при доказательстве финитной аппроксимируемости **Int**. В связи с последним результатом $\mathbf{G_3}$ называют ещё первой матрицей Яськовского. Более подробно ознакомиться со свойствами $\mathbf{G_3}$ можно, используя как уже перечисленные работы, так и монографию А.С. Карпенко [1].
Зададим правила вывода натурального исчисления $\mathfrak{ND}_{G_3}$:

$$(EMW)\ \frac{}{\neg A \vee \neg\neg A} \quad (\vee I_1)\ \frac{A}{A \vee B} \quad (\vee I_2)\ \frac{B}{A \vee B} \quad (\vee E)\ \frac{A \vee B,\ \begin{matrix}[A]\\ C\end{matrix},\ \begin{matrix}[B]\\ C\end{matrix}}{C}$$

$$(\wedge I)\ \frac{A,\ B}{A \wedge B} \quad (\wedge E_1)\ \frac{A \wedge B}{A} \quad (\wedge E_2)\ \frac{A \wedge B}{B} \quad (\neg \vee I)\ \frac{\neg A \wedge \neg B}{\neg(A \vee B)} \quad (\neg \vee E)\ \frac{\neg(A \vee B)}{\neg A \wedge \neg B}$$

$$(\neg \wedge I)\ \frac{\neg A \vee \neg B}{\neg(A \wedge B)} \quad (\neg \wedge E)\ \frac{\neg(A \wedge B)}{\neg A \vee \neg B} \quad (\supset I_1)\ \frac{B}{[A] \supset B} \quad (\supset I_2)\ \frac{\neg A}{[A] \supset B}$$

$$(\supset I_3)\ \frac{}{(A \vee \neg B) \vee (A \supset B)} \quad (MP)\ \frac{A \supset B,\ A}{B} \quad (MT)\ \frac{A \supset B,\ \neg B}{\neg A}$$

$$(\neg \supset I)\ \frac{\neg B}{\neg A \vee \neg(A \supset B)} \quad (\neg \supset E_1)\ \frac{\neg(A \supset B)}{\neg B} \quad (\neg \supset E_2)\ \frac{\neg(A \supset B),\ \neg A}{A}$$

Мы допускаем два различных, но эквивалентных определения вывода A из Γ в $\mathfrak{ND}_{G_3}$. Одно из них предполагает линейную форму записи вывода, другое — древовидную. Поскольку оба эти определения стандартны для рассматриваемого типа исчислений, мы их здесь не приводим.

Теорема. $\dot\forall \Gamma\ \dot\forall A : \Gamma \vdash A$ в исчислении $\mathfrak{ND}_{G_3} \Leftrightarrow \Gamma \models A$ в матрице $\mathfrak{M}_{G_3}$.

[1] Исчисление называем натуральным, если в нем наряду с прямыми n-посылочными ($n \geqslant 0$) правилами вывода используются косвенные m-посылочные ($m > 0$) правила вывода, позволяющие делать допущения. В построенном нами натуральном исчислении $\mathfrak{ND}_{G_3}$ косвенными правилами являются $(\vee E)$, $(\supset I_1)$ и $(\supset I_2)$, а остальные — прямыми.

[2] Логикой называем множество всех утверждений о следовании в соответствующем языке.

[3] Определение формулы языка логики $\mathbf{G_3}$ стандартно. Условимся буквами A, B и C обозначать в метаязыке формулы объектного языка, буквой Γ множество (возможно, пустое) формул, символами $[A]$ и $[B]$ допущения, а символами $\Leftrightarrow$ и $\dot\forall$ метаязыковые классические эквиваленцию и квантор общности.

Проведённое нами доказательство **Теоремы** здесь не приводим (из-за недостатка места); отметим лишь, что при её доказательстве справа налево нами была использована модификация метода Л. Хенкина, описанная в статье [5].

Источники и литература

1) Карпенко А.С. Развитие многозначной логики. М. 2010.
2) Gödel K. On the intuitionistic propositional calculus // Gödel K. Collected works. N.Y. Vol.1. 1986. С. 300-301. (English translation of Gödel's paper of 1932).
3) Heyting A. The Formal Rules of Intuitionistic Logic // Mancosu P. From Brouwer to Hilbert. The Debate on the Foundations of Mathematics in the 1920s. Oxford. 1998. С. 311-328. (English translation of Heyting's paper of 1930).
4) Jaśkowski S. Investigations into the system of intuitionistic logic // Studia Logica, Вып.34. 1975. С. 117-120. (English translation of Jaśkowski's paper of 1936).
5) Kooi B., Tamminga A. Completeness via correspondence for extensions of the logic of paradox // The Review of Symbolic Logic, Вып.5. 2012. С. 720-730.
6) Łukasiewicz J. Logic and the problem of the foundations of mathematics // Łukasiewicz J. Selected works. Amsterdam and Warszawa. 1970. С. 278-294. (English translation of Łukasiewicz's paper of 1941).

Слова благодарности

Я выражаю искреннюю благодарность моему научному руководителю Дмитрию Владимировичу Зайцеву, под влиянием которого мои научные интересы оказались связаны с натуральными исчислениями для многозначных логик.