Пространственный подход в популяционной динамике растительных сообществ

Галкин Егор Геннадьевич
Студент
Факультет ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: radiation7@mail.ru

Предметом данного исследования является предложенная Ульфом Дикманом и Ричардом Лоу стохастическая модель, описывающая растительные сообщества. Цель состоит в подтверждении гипотезы, описывающей пространственную динамику популяций растений, предложенной в работе [1]. Для достижения поставленной цели, исходная модель была дополнена граничными и начальными условиями, а также описанием состояния стохастической модели в произвольный момент времени при помощи пространства Фока.

Модель описывает поведение популяции растений одного вида в заданной области, при том, что вероятность смерти и рождения для каждой особи зависит от местоположения других особей. Для описания действия потенциалов рождения, смерти и расброса в замкнутой области, изначально заданных для всего пространства, было использовано преобразование, соответсвующее отражению на границе области, с сохранением $L_1(\mathbb{R}^2)$ нормы.

Уравнение динамики в векторном виде:

$$\dot{\varphi}(\underline{n},t) = L\varphi(\underline{n},t) = \sum_r \left(d + d' \sum_{r'} w^d_{rr'} \left(n_{r'} - \delta_{rr'}\right)\right) \varphi(...,n_r - 1,...,t) +$$

$$+ \sum_r \sum_{r'} (n_r+1) n_{r'} m^b_{rr'} \left(b + b' \sum_{r''} w^b_{r'r''} \left(n_{r''} - \delta_{r'r''}\right)\right) \varphi(...,n_r + 1,...,t) -$$

$$- \sum_r n_r \left(d + d' \sum_{r'} w^d_{rr'} \left(n_{r'} - \delta_{rr'}\right)\right) \varphi(...,n_r,...,t) -$$

$$- \sum_r \sum_{r'} n_{r'} m^b_{rr'} \left(b + b' \sum_{r''} w^b_{r'r''} \left(n_{r''} - \delta_{r'r''}\right)\right) \varphi(...,n_r,...,t)$$

Разложение Лиувиллиана через операторы рождения и смерти:

$$L = d\sum_r (a_r - \pi_r a_r) + d' \sum_{r,r'} \left(w^d_{rr'} \pi_r \pi_{r'} a_{r'} a_r a_r - w^d_{rr'} \pi_r \pi_r \pi_{r'} a_{r'} a_r a_r \right) +$$
$$+ b \sum_{r,r'} m^b_{rr'} (\pi_r \pi_{r'} a_{r'} - \pi_r a_r) +$$
$$+ b' \sum_{r,r',r''} m^b_{rr'} w^b_{r'r''} (\pi_r \pi_{r'} \pi_{r''} a_{r''} a_{r'} - \pi_{r'} \pi_{r'} \pi_{r''} a_{r''} a_{r'} a_{r'})$$

Оператор эволюции $U_t(\underline{z}, \underline{\zeta}) = e^{Lt}$ после смены базиса, при граничных условиях $i\eta'_r(t) = z_r$, $\eta_r(0) = \zeta_r$

$$U_t(\underline{z}, \underline{\zeta}) = \int \prod_r \mathcal{D}\eta_r(t') \mathcal{D}\eta'_r(t') exp \left\{ - \int_0^t dt' \left[\sum_r i\eta'_r \dot{\eta}_r - d \sum_r (i\eta'_r - i\eta_r \eta'_r) - \right.\right.$$
$$- d' \sum_{r,r'} \left(-w^d_{rr'} \eta_r \eta_{r'} i\eta'_{r'} (\eta'_r)^2 + i w^d_{rr'} (\eta_r)^2 \eta_{r'} \eta_{r'} (\eta'_r)^2 \right) -$$
$$- b \sum_{r,r'} (i m^b_{rr'} \eta_r \eta_{r'} \eta'_{r'} - i\eta_r \eta'_r) -$$
$$\left.\left. - b' \sum_{r,r',r''} m^b_{rr'} w^b_{r'r''} (-\eta_r \eta_{r'} \eta_{r''} \eta'_{r''} \eta'_{r'} + i(\eta_{r'})^2 \eta_{r''} \eta'_{r''} (\eta'_{r'})^2) \right] + \sum_r i\eta'_r(t) \eta_r(t) \right\}$$

В будущем планируется использование теории возмущений для приближенного вычисления искомых характеристик модели, таких как средняя плотность особей и отличие плотности особей от равномерной.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки молодых российских учёных – кандидатов наук МК-6108.2015.9

Литература

1. Dieckmann U., Law R. The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity //Cambridge University Press, 2000
2. L. Peliti. Path integral approach to birth-death processes on a lattice. Journal de Physique, 1985, 46 (9), pp.1469-1483.