Секция «Теория вероятностей и математическая статистика»

Числа независимости случайных подграфов дистанционных графов

Пядеркин Михаил Михайлович
Студент (специалист)
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
Механико-математический факультет, Кафедра теории вероятностей, Москва, Россия
E-mail: meshanya@gmail.com

Основным объектом изучения данной работы являются так называемые *дистанционные графы*. А именно, пусть r и s — два натуральных числа. Тогда определим дистанционный граф $G(n,r,s) = (V(n,r), E(n,r,s))$, где

$$V(n,r) = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \ x_i \in \{0,1\}, x_1 + x_2 + \ldots + x_n = r\},$$

$$E(n,r,s) = \{\{\mathbf{x},\mathbf{y}\} : \ (\mathbf{x},\mathbf{y}) = s\},$$

а $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ обозначает обычное евклидово скалярное произведение. Другими словами, вершины графа можно отождествить с r-элементными подмножествами множества $\{1,2,\ldots,n\}$, а ребро проводится между двумя вершинами в том случае, если соответствующие множества пересекаются ровно по s элементам. Такие семейства множеств являются одним из классических объектов изучения экстремальной комбинаторики.

Дистанционные графы играют важную роль в комбинаторной геометрии и теории кодирования. К примеру, конкретный граф $G(n,3,1)$ был впервые изучен в работе Ж. Надя, где он был использован для построения конструктивных оценок числа Рамсея, а некоторые свойства графа $G(n,3,1)$ удивительным образом помогают в известной задаче Нельсона-Хадвигера об отыскании хроматического числа пространства $\mathbb{R}^n$.

В настоящей работе мы изучим некоторые свойства *случайных подграфов* этого графа в хорошо известной моделе Эрдеша-Реньи. А именно, пусть $p \in [0,1]$, тогда случайный подграф $G_p(n,r,s)$ имеет то же множество вершин $V(n,r)$, а каждое ребро графа $G(n,r,s)$ включается в подграф с вероятностью p независимо от остальных.

Напомним, что *числом независимости* $\alpha(G)$ графа $G = (V,E)$ называется размер максимального множества его вершин, попарно не соединенных ребрами (такое множество само называется *независимым*):

$$\alpha(G) = \max\{|A| : \ \forall\, \mathbf{x},\mathbf{y} \in A \ \{\mathbf{x},\mathbf{y}\} \notin E\}.$$

В данной работе будет интересовать число независимости случайного графа $G_p(n,r,s)$, где $p = \frac{1}{2}$. В этом случае найден порядок роста числа независимости при $n \to \infty$, а в случае $r = 3$ и $s = 1$ и точная асимптотика данной величины. А именно, доказаны теоремы:

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon > 0$ — фиксированное число. Существует такая константа $\delta = \delta(\varepsilon, r, s)$, что с асимптотической вероятностью 1 при $n \to \infty$ выполнено*

$$\alpha\left(G_{1/2}(n,r,s)\right) \le (1+\varepsilon)\alpha\left(G(n,r,s)\right) + \delta C_n^s \log_2 n$$

Теорема 2. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо неравенство*

$$\alpha\left(G_{1/2}(n,r,s)\right) \ge (1+o(1)) \frac{C_n^r (r-s)}{C_r^s C_{n-r}^{r-s}} \log_2 n.$$

Теорема 3. *С асимптотической вероятностью 1 справедливо равенство*

$$\alpha\left(G_{1/2}(n,3,1)\right) = (2+o(1))n\log_2 n.$$

Источники и литература

1) Боголюбский Л.И., Гусев А.С., Пядеркин М.М., Райгородский А.М. Числа независимости и хроматические числа случайных подграфов в некоторых последовательностях графов. // Доклады РАН, 457. 2014
2) Райгородский А.М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств. // Успехи математических наук, 56. 2001. вып.1, С.107-146
3) Райгородский А.М. // Проблема Эрдеша-Хадвигера и хроматические числа конечных геометрических графов. // Математический сборник, 196. 2005. №1, С.123-156
4) B. Bollobás, B.P. Narayanan, A.M. Raigorodskii. On the stability of the Erdös-Ko-Rado theorem. // Journal of Combinatorial Theory. Ser. A. 2014