Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

О колеблемости решений уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка с положительным потенциалом

Дулина Ксения Михайловна[1], Корчемкина Татьяна Александровна[2]
1 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия; 2 - Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: sun-ksi@mail.ru

Рассматривается уравнение

$$y'' + p(x,\, y,\, y')\,|y|^k \operatorname{sgn} y = 0, \quad k > 1. \tag{1}$$

В работе [1] получена классификация решений уравнения (1) в случае $p = p(x)$. С использованием методов, изложенных в работе [2, Часть 1], в случае $p(x,\, y,\, y') < 0$ в работе [3] доказано существование максимально продолженных решений с заданной областью определения, и получена классификация всех максимально продолженных решений.

Используя методы работы [2], можно получить классификацию решений уравнения (1) в случае $p(x,\, y,\, y') > 0$.

Теорема 1. *Пусть функция $p(x,\, y,\, y')$ положительна, непрерывна по совокупности переменных, липшицева по последним двум аргументам и удовлетворяет неравенствам*

$$0 < m \le p(x,\, y,\, y') \le M < +\infty.$$

Тогда все максимально продолженные нетривиальные решения уравнения (1), как и их первые производные, являются колеблющимися при возрастании и при убывании аргумента, причем, нули x_j решения и нули x'_j его первой производной чередуются, то есть,

$$\dots < x_{j-1} < x'_j < x_j < x'_{j+1} < \dots, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1, $y(x)$ — нетривиальное максимально продолженное решение уравнения (1), кроме того, функция $p(x,\, y,\, y')$ равномерно по $y,\, y'$ стремится к $p_+ > 0$ при $x \to +\infty$ и к $p_- > 0$ при $x \to -\infty$.*

Тогда при $j \to \pm\infty$ справедливы соотношения:

1) $\frac{y'(x_{j+1})}{y'(x_j)} \to -1$,

2) $\frac{y(x'_{j+1})}{y(x'_j)} \to -1$,

3) $\frac{x_{j+1}-x_j}{x_{j+2}-x_{j+1}} \to 1$.

Замечание. *В случае $p(x,\, y,\, y') \equiv p_0 > 0$ все нетривиальные максимально продолженные решения уравнения (1) являются периодическими.*

Источники и литература

1) Кигурадзе И.Т., Чантурия Т.А. Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1990.

2) Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа. Под ред. И. В. Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22–288.

3) Дулина К.М., Корчемкина Т.А. О существовании решений с заданной областью определения уравнений типа Эмдена–Фаулера второго порядка // В сб. тр. миниконф. “Качественная теория дифференциальных уравнений и приложения”. М.: МЭСИ, 2014. С. 18–27.