Секция «Дифференциальные уравнения, динамические системы и оптимальное управление»

Оценки положительных решений дифференциального уравнения с неотрицательной степенной нелинейностью

Безухов Дмитрий Александрович
Аспирант
Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова, Механико-математический факультет, Кафедра дифференциальных уравнений, Москва, Россия
E-mail: biza0503@rambler.ru

В данной работе рассматривается уравнение:

$$r_n(x)\frac{d}{dx}\left(r_{n-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{d}{dx}\left(r_0(x)y\right)\right)\dots\right) = (-1)^n p(x)|y|^k, \tag{1}$$

где $n > 1$, $k > 1$, непрерывная функция $p(x)$ удовлетворяет условиям $m_* x^\sigma \le p(x) \le m^* x^\sigma$, $\sigma \ge 0$, $m_* > 0$, $m^* > 0$, и непрерывные функции $r_j(x)$ удовлетворяют неравенствам $0 < m_j \le r_j(x) \le M_j < +\infty$, $j = 0, \dots, n$.

Введем обозначения $\alpha = \frac{n}{k-1}$, $\beta = \frac{\sigma}{k-1}$, $y^{[j]} = r_j(x)\frac{d}{dx}\left(r_{j-1}(x)\frac{d}{dx}\left(\dots\frac{d}{dx}\left(r_0(x)y\right)\right)\dots\right)$.

Для уравнения (1) получены оценки положительных решений, аналогичные оценкам, полученным для уравнения Эмдена-Фаулера в [1] (при $\sigma = 0$), в [2] (при $\sigma < -k(n-1)-1$) и в [4] (при $\sigma \le 0$), а также в [3] для уравнения (1) с $p(x) \equiv 1$ и $r_j(x) \equiv 1$ для любого j.

Теорема 1. *Существует такая константа* $C = C(n, k, m_*, m^*, \sigma, m_0, \dots, m_n, M_0, \dots, M_n)$, *что для любого решения* $y(x)$ *уравнения (1) с максимальным интервалом существования* $(0; +\infty)$ *выполнены неравенства*

$$(-1)^m y^{[m]}(x) \le C x^{-\alpha-\beta-m}, \quad m = 0, 1, \dots n-1. \tag{2}$$

Теорема 2. *Пусть* $r_j(x) \equiv 1$ *для любого* j. *Тогда существуют такие константы* $C_1 = C_1(n, k, m_*, m^*, \sigma)$ *и* $C_2 = C_2(n, k, m_*, m^*, \sigma)$, *что для любого нетривиального решения* $y(x)$ *уравнения (1) с максимальным интервалом существования* $(0; +\infty)$ *выполнены неравенства*

$$C_1 x^{-\alpha-\beta-m} \le (-1)^m y^{(m)}(x) \le C_2 x^{-\alpha-\beta-m}, \quad m = 0, 1, \dots n-1. \tag{3}$$

Источники и литература

1) Кондратьев В. А., Самовол В.С. О некоторых асимптотических свойствах решений уравнения типа Эмдена–Фаулера. Дифференц. уравнения, 1981, т.17, No 4, стр. 749-750.

2) Квиникадзе Г.Г. О сингулярных решениях нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. В сб.: Доклады семинара ИПМ имени И.Н.Векуа, Тбилиси, ТГУ. 1983, т.17, стр. 36-49.

3) Kozlov V.A. On Kneser solutions of higher order nonlinear ordinary differential equations. Ark. Mat., 1999, v. 37, No 2, p. 305-322.

4) Асташова И.В. Качественные свойства решений квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений // В сб.: Качественные свойства решений дифференциальных уравнений и смежные вопросы спектрального анализа: научное издание под ред. И.В.Асташовой. М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2012. С. 22-288