Секция «Математика и механика»

Решения некоторых мартингальных задач Монжа-Канторовича

Алаторцев Артем Александрович
Аспирант
МГУ - Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: artyom-alatortsev@rambler.ru

Рассмотрим такую задачу:

$$P = \inf\{E_Q[\Phi] : Q \in M(\mu_1, \dots, \mu_n)\}, \tag{1}$$

где Φ — некоторый функционал на $\mathbb{R}^n$, а $M(\mu_1, \dots, \mu_n)$ – множество всех вероятностных мер на $\mathbb{R}^n$, для которых координатный процесс имеет одномерные распределения $\mu_1, \dots, \mu_n$ и образует мартингал. Это — мартингальная задача Монжа-Канторовича. Совместно с этой проблемой рассматривается форма:

$$\Psi(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum u_i(s_i) + \sum \Delta_j(s_1, \dots, s_j)(s_{j+1} - s_j), \tag{2}$$

где $u_i - \mu_i$ — интегрируемые функции на $\mathbb{R}$, Δ_j —ограниченные и измеримые функции на $\mathbb{R}$. Ставится задача нахождения такой величины:

$$D = \sup\Big\{ \sum E_{\mu_i} u_i : \exists \Delta_1, \dots, \Delta_{n-1} \text{т.ч.} \Psi \leq \Phi \Big\}. \tag{3}$$

Очевидно, что $P \leq D$, но при некоторых ограничениях и условиях на функционал Φ выполнено равенство и, более того, существует такая мартингальная мера, что на ней достигается минимум [1]. В [1] и [2] были рассмотрены некоторые частные случаи и показано, что $P = D$ в случае, когда $n = 2$ и функционал $\Phi(s_1, s_2) = \pm|s_2 - s_1|$. Целью данной работы является решения задач (1) и (3) в случае $n = 2$ и $\Phi(s_1, s_2) = \max(s_1, s_2)$ для некоторых начальных распределений μ_1 и μ_2.

Литература

1. M. Beiglbock, P.Henry-Labordere and F. Penkner. Model-independent bounds for option prices - a mass transport approach. Finance and Stochastics, pp 477-501, 2013

2. D. Hobson and A. Neuberger. Robust bounds for forward start options. Mathematical Finance, 22(1):31-56, 2012