Секция «Математика и механика»

Слабо надкритический режим в ветвящемся случайном блуждании

Антоненко Екатерина Александровна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: eka.antonenko@gmail.com

Рассматривается модель простого симметричного ветвящегося случайного блуждания с непрерывным временем на многомерных решетках при условии существования одной частицы в начальный момент времени. Подобные модели находят различные применения. Например, в [1] исследована непрерывная модель гомополимера, где вместо целочисленной решетки рассматривается $\mathbb{R}^d$ и броуновское движение вместо случайного блуждания. В [1] показано, в частности, что существует критическое значение температуры, при достижении которого происходит переход из глобулярной формы гомополимера в вытянутую. Подход, предложенный в [1], основан на резольвентном анализе эволюционного оператора, но не охватывает случая ветвящихся случайных блужданий по многомерным решеткам. В нашей работе случайное блуждание, лежащее в основе процесса, задается разностным лапласианом на многомерной решетке, и функция Грина разностного лапласиана, которая совпадает с преобразованием Лапласа переходной вероятности случайного блуждания, обозначается через $G_\lambda(x, y)$, где x и y — точки решетки. Процесс ветвления в источнике, расположенном в одном из узлов решетки, определяется инфинитезимальной производящей функцией потомков. Одной из важных характеристик процесса является параметр β, равный значению первой производной этой функции в единице. Потомки начальной частицы блуждают, гибнут и размножаются по тому же закону независимо от всех остальных. Как известно (см., например, [2]), эволюцинным оператором средних численностей частиц в таком ветвящемся случайном блуждании является разностный лапласиан с одноточечным возмущением. Асимптотическое поведение ветвящегося случайного блуждания зависит от интенсивности источника и, следовательно, от значения β [3]. Оказывается, при $\beta > \beta_{cr}$, где $\beta_{cr} = G_0^{-1}(0, 0)$, у эволюционного оператора появляется положительное изолированное собственное значение λ, которое находится из уравнения $\beta G_\lambda(0, 0) = 1$ и определяет экспоненциальный рост численностей частиц [4]. Целью работы явилось исследование асимптотического поведения собственного значения $\lambda(\beta)$ при $\beta \downarrow \beta_{cr}$. Поведение ветвящегося случайного блуждания при $\beta \downarrow \beta_{cr}$ предлагается назвать слабо надкритическим. Ключевым моментом решения этой задачи служит изучение свойств функции Грина разностного лапласиана $G_\lambda(x, y)$ при малых λ. С использованием результатов о поведении функции Грина получена классификация асимптотического поведения $\lambda(\beta)$ при $\beta \downarrow \beta_{cr}$ в зависимости от размерности пространства блуждания. В заключение отметим актуальность решения данной задачи для конечного числа источников ветвления на решетке.

Литература

1. M.Cranston, L.Coralov, S.Molchanov, B.Vainberg. Continuous model for homopolymers. Journal of Functional Analysis, Volume 256, Issue 8, 15 April 2009, Pages 2656–2696.

2. С.А. Молчанов, Е.Б. Яровая. Предельные теоремы для функции Грина решётчатого лапласиана при больших уклонениях случайного блуждания. Известия РАН, серия математическая, 2012, No. 6, том 76.

3. Е.Б. Яровая. Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде. 2007, М.: Центр прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ.

4. Е.Б. Яровая. Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий по $\mathbf{Z}^d$. Теория вероятн. и ее примен., 2010, No. 4, том 55, с.705–731.

Слова благодарности

Выражаю благодарность научному руководителю Яровой Елене Борисовне за постановку задачи и руководство процессом ее решения.