Секция «Математика и механика»

К задаче о брахистохроне в сопротивляющейся среде

Зароднюк Алёна Владимировна
Студент
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: alenaz_90@inbox.ru

Целью предлагаемой работы является качественный анализ задачи о брахистохроне при наличии вязкого сопротивления, позволяющий установить характерные свойства траекторий без численного моделирования.
Рассматривается движение материальной точки массы m в вертикальной плоскости в однородном поле сил тяжести и в однородной сопротивляющейся среде. Классическая постановка задачи о брахистохроне состоит в выборе формы траектории, соединяющей две заданные точки вертикальной плоскости, время движения по которой рассматриваемой материальной точки будет минимальным. Предположим, что зависимость максимальной дальности от времени носит монотонный характер. Задача о брахистохроне и задача максимизации дальности за заданное время взаимосвязаны в следующем смысле. Если полученное в результате решения задачи с фиксированным временем максимальное значение дальности принять в качестве заданного конечного условия для задачи быстродействия, то минимальное время, полученное в результате решения последней, совпадает с тем временем, которое было фиксировано при решении задачи максимизации дальности. Поэтому рассмотрим задачу максимизации горизонтальной дальности за фиксированное время.
Уравнения движения [1] в безразмерных переменных имеют вид :

$$\begin{cases} \dot{x} = v, \\ \dot{y} = w, \\ \dot{v} = -v - wu, \\ \dot{w} = -1 - w + vu. \end{cases} \tag{1}$$

Здесь x, y – соответственно горизонтальная и вертикальная координаты точки, v и w – горизонтальная и вертикальная скорости, u - управление. Точкой обозначено дифференцирование по времени. Начальные условия для системы (1) заданы, конечные условия свободны, кроме координаты y в заданный момент окончания процесса. Целью управления является минимизация функционала $J = -x(T)$.
Для исследования задачи применён принцип максимума Понтрягина, найдено особое управление [2]. В итоге задача оптимального управления сведена к краевой задаче для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений. Проведен качественный анализ траекторий этой системы, установлены их характерные свойства, неизвестные ранее. Приведены результаты численного решения краевой задачи.