Секция «Математика и механика»

О корректной разрешимости одной задачи тепломассопереноса для нестационарного потока

Чехов Сергей Асланович
Студент
Воронежский государственный университет, Математический факультет, Воронеж, Россия
E-mail: chekhovsergey@rambler.ru

На полуоси $t \in (0, \infty)$ определим два вида банаховых пространств функций $f(t)$: $S^{+}_{v,\omega}$ и $S^{-}_{v,\omega}$ нормами

$$\|f\|_{S^{+}_{v,\omega}} = \sup\left[\frac{1}{t^{\omega}}\int_0^t s^{v}|f(s)|ds\right]; \tag{1}$$

$$\|f\|_{S^{-}_{v,\omega}} = \sup\left[t^{\omega}\int_0^t s^{-v}|f(s)|ds\right], \tag{2}$$

$p \geq 1$, $\omega \geq 0$, $v \geq 0$.
При $x \geq 0$, $\mu \geq 0$, $f \in S^{\pm}_{v,\omega}$ рассматриваются задачи об отыскании функций $u_{\pm}(t,x) \in S^{\pm}_{v,\omega}$, удовлетворяющих уравнению

$$\pm t\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}, \tag{3}$$

и начально–краевым условиям:
а) в случае $L^{+}u = t\frac{\partial u}{\partial t}$.

$$\lim_{x\to\infty}|u(t,x)| = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial x} \pm \mu u(t,x)|_{x=0} = f(t). \tag{5}$$

$$u(0,x) = 0. \tag{6}$$

б) в случае $L^{-}u = -t\frac{\partial u}{\partial t}$ требуется только выполнение условий (4) и (5).
Заметим, что особенностью уравнения (3) является обращение в нуль коэффициента при $\frac{\partial u}{\partial t}$, т.е. случай, который не рассматривается в [1] для аналогичных задач. Кроме того, ранее также не рассматривалась корректная разрешимость таких задач с получением оценок на решения.
Справедливы следующие
Теорема 1.В случае $L^{+}u = t\frac{\partial u}{\partial t}$, если выполнены условия, $v + 1 - \omega \geq 0$, $\mu + \sqrt{\omega} > 0$, то при каждом $f \in S^{+}_{v,\omega}$ задача (3)—(6) имеет единственное решение $u(t,x)$ такое, что при каждом $x \geq 0$, $u(t,x) \in S^{+}_{v,\omega}$ и справедлива оценка

$$\|u(t,x)\|_{S^{+}_{v,\omega}} \leq \frac{1}{(\mu+\sqrt{\omega})}\exp\left[-(v+1-\omega)x\right]\|f\|_{S^{+}_{v,\omega}} \tag{7}$$

Теорема 2.В случае $L^{-}u = -t\frac{\partial u}{\partial t}$, если выполнены условия, $\omega + 1 - v \geq 0$, $\mu + \sqrt{\omega} > 0$, то при каждом $f \in S^{-}_{v,\omega}$ задача (3)—(5) имеет единственное решение $u \in S^{-}_{v,\omega}$ и для него выполнена оценка

$$\|u(t,x)\|_{S^{-}_{v,\omega}} \leq \frac{1}{(\mu+\sqrt{\omega})}\exp\left[-(\omega-v+1)x\right]\|f\|_{S^{-}_{v,\omega}}. \tag{8}$$

При доказательстве этих теорем используются результаты С.Г. Крейна по равномерно корректной разрешимости начально–краевых задач для уравнений в банаховом пространстве [5], с. 324, а также методы, примененные в [2]—[4].

Литература

1. Бабенко Ю. И. Тепломассообмен: Методы расчета тепловых и диффузных потоков – Л.: Химия, 1986. – 144 с.

2. Костин В. А. Операторный метод Маслова–Хевисайда и C_0–операторный интеграл Дюамеля/ В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин/ ДАН, 2013, Т. 452, N4, с. 367–370.

3. Костин В. А. Элементарные полугруппы линейных преобразований и их производящие уравнения/ В.А. Костин, А.В. Костин, Д.В. Костин/ ДАН, 2014, Т. 455, N 2, с. 1—4.

4. Костин Д. В. О третьей краевой задаче для уравнения эллиптического типа в банаховом пространстве на $\mathbb{R}^+$ / Материалы Воронежской весенней математической школы "Понтрягинские чтения–XIII Воронеж, Изд-во ВГУ 2012, с. 97–98.

5. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве / С.Г. Крейн.— М.: Наука, Глав. ред. физ-мат. лит-ры., 1967.— 464с.