Секция «Математика и механика»

Инвариант Бухштабера и многообразия Грассмана

Ероховец Николай Юрьевич

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия
E-mail: erochovetsn@hotmail.com

В центре внимания торической топологии лежит сопоставление каждому абстрактному симплициальному $(n-1)$-мерному комплексу K на m вершинах $(m+n)$-мерного *момент-угол комплекса* $\mathcal{Z}_K$ с каноническим действием m-мерного компактного тора $T^m = (S^1)^m$. Это позволяет изучать комбинаторику комплекса при помощи топологии момент-угол многообразия и наоборот. *Инвариант Бухштабера* $s(K)$ равен максимальной размерности торических подгрупп $H \subset T^m$, $H \simeq T^r$, действующих свободно на $\mathcal{Z}_K$. В 2002 году В.М. Бухштабером была поставлена проблема найти эффективное комбинаторное описание числа $s(K)$ при помощи комбинаторики комплекса K. Рассмотрим *многообразие Грассмана* $G_r(\mathbb{R}^m)$ всех r-мерных подпространств в $\mathbb{R}^m$. Известно вложение $G_r(\mathbb{R}^m) \hookrightarrow \mathbb{R}P^{\binom{m}{r}-1}$, которое задаётся набором *плюккеровых координат* $\{p_{i_1\dots i_r} = \det S^{i_1\dots i_r}\}$, определённых с точностью до общего множителя. Образ этого вложения описывается набором квадратичных уравнений:

$$\sum_{t=1}^{r+1}(-1)^t p_{i_1\dots i_{r-1}j_t}p_{j_1\dots\widehat{j_t}\dots j_{r+1}} = 0 \text{ для всех } \{i_1,\dots,i_{r-1}\} \text{ и } \{j_1,\dots,j_{r+1}\}.$$

Теорема. *Имеем $s(K) \geqslant r$ тогда и только тогда, когда найдётся рациональная точка в $G_r(\mathbb{R}^m)$, такая что для целочисленных взаимно простых плюккеровых координат имеем: НОД$\{p_{i_1\dots i_r}\colon i_1,\dots,i_r \notin \sigma\} = 1$ для любого максимального симплекса $\sigma \in K$.*

Литература

1. Бухштабер В.М., Панов Т.Е. Торические действия в топологии и комбинаторике. М., 2004

2. Ероховец Н.Ю. Теория инварианта Бухштабера симплициальных комплексов и выпуклых многогранников, Труды МИАН им. В.А.Стеклова, Т. 286, 2014

Слова благодарности

Автор благодарен В.М.Бухштаберу за постоянное внимание к работе и А.А.Айзенбергу за ценные обсуждения.