Секция «Математика и механика»

Математическое моделирование двумерных и трехмерных нестационарных задач линейной теории упругости с использованием метода спектральных элементов.

Коновалов Дмитрий Андреевич

Аспирант

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: dmikonovalov@gmail.com

Современное математическое моделирование невозможно представить без использования высокопроизводительных вычислительных систем, которые позволяют качественно изменить технологию математического моделирования сложнейших задач теории упругости. Ранее основным требованием к функциональности программ было обеспечение таких режимов работы, которые позволяли бы при высокой скорости расчета иметь достаточную точность результатов при определение перемещений, деформаций, напряжений. Главным подходом для решения динамических задач теории упругости считался метод конечных элементов (МКЭ) [3]. Для высокой точности расчетов и достижения необходимой точности аппроксимации решения требуется строить достаточно подробную сетку по пространству, что влечет за собой измельчение шагов по времени. В результате происходит рост числа расчетных шагов по времени, даже при неявных разностных схемах дискретизации по времени. Также в процессе работы МКЭ возникает система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) большой размерности, решение которой является вычислительно затратным процессом. Все это ведут к возрастанию затрачиваемого машинного времени.

Необходимость проводить математическое моделирование сейсмической активности земной коры в масштабах материковых регионов сохраняет свою актуальность на данный момент и заставляет искать более эффективные и менее вычислительно затратные пути проведения расчетов [1]. Одним из способов решения данной задачи является метод спектральных элементов (МСЭ) [2].

Основные преимущества МСЭ:

1) Высокая скорость работы вычислительного алгоритма за счет отсутствия необходимости решения СЛАУ. Это в свою очередь обеспечивается диагональной структурой матрицы масс, получающейся за счет специального выбора квадратурной формулы для интегрирования по расчетной области. Также для дискретизации по времени выбирается явная разностная схема.

2) Высокая точность аппроксимации решения при небольшом числе сеточных элементов по сравнению с МКЭ. Погрешность численного решения оценивается: $||[\mathrm{u}]_h$ - $\mathrm{u}_h|| \leq C(N)$, приэтом$C(N) = C_1 \mathrm{h}^N \mathrm{e}^{-N}$ для МСЭ и $\mathrm{C(N)} = \mathrm{C}_2\mathrm{h}^N$ для МКЭ. C_1 и C2 – константы, h – характерный размер сетки, N – порядок элемента, u_h – численное решение, $[\mathrm{u}]_h$ – проекция точного решения на сетку.

3) Возможность распараллеливания вычислений на несколько расчетных нитей, например с помощью технологий OpenMP, MPI, CUDA.

В ходе исследования был проведен ряд расчетов: математическое моделирование акустического каротажа в стволе скважины, а также математическое моделирование поверхностной сейсмики для регионов со сложным литологическим составом. В процессе работы был выполнен сравнительный анализ эффективности работы МСЭ и МКЭ на примере двумерных и трехмерных динамических задач линейной теории упругости. МСЭ убедительно продемонстрировал свое высокое качество работы, обеспечивая необходимую точность аппроксимации решения (значение относительной погрешности) при достаточно низких требованиях к вычислительным ресурсам (оперативной памяти) и высокой скорости расчета задачи, по сравнению с МКЭ.

Одной из особенностей реализованного метода спектральных элементов является поддержка возможности расчета смешанных сеток, состоящих из различных типов элементов в рамках одной модели:

- треугольники (TRI3, TRI6) и четырехугольники (QUAD4, QUAD8, QUAD9) в двумерном случае;

- гексаэдры (HEX8, HEX20, HEX27), призмы (WEDGE6, WEDGE15), тетраэдры (TETRA4, TETRA10) и пирамиды (PYRAMID5, PYRAMID13) в трехмерном случае.

Литература

1. Hughes T.J.R., The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis. Prentice Hall, Englewood Cliffs, London, 1987.

2. Komatitsch D., Violette J.-P., The spectral element method: an efficient tool to simulate the seismic response of 2D and 3D geological structures. Bulletin of Seismological Society of America, 88(2), 1998.

3. Zienkievicz O.C., Taylor R.L., The Finite Element Method. Volume 1: The Basis. Butterworth-Heinemann, Oxford, 2000.