

Секция «Математика и механика»

Формулы Фейнмана, описывающие диффузию на разветвленных
поверхностях

Дубравина Виктория Андреевна

Студент

Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова,

Механико-математический факультет, Москва, Россия

E-mail: dubravina_vika@mail.ru

Получено представление с помощью лагранжевой формулы Фейнмана для операторной полугруппы, порожденной параболическим дифференциальным уравнением второго порядка относительно функций, определенных на декартовом произведении прямой \mathbb{R} и графа, состоящего из n лучей с общим началом. Это произведение, обозначаемое символом Y_n , естественно представлять как n полуплоскостей, объединенных по общей прямой, вдоль которой на решение накладываются естественные условия согласования. Исследуемый в задаче дифференциальный оператор определяется $2n$ параметрами a_i, c_i , где c_i являются коэффициентами диффузии на полуплоскостях, а a_i – коэффициентами сноса. Пусть для каждого $t \geq 0$, $F(t) = I_2 F_2(t) F_1(t) I_1$, где

$$(F_1(t)f)_i(x, y) = \varphi_1(x, t) \left(\frac{1}{2\sqrt[3]{t}} \int_0^{2\sqrt[3]{t}} f_i(\xi, y) d\xi + b_i(y, t)(x - 2\sqrt[3]{t}) \right) + \varphi_2(x, t) f_i(x, y).$$

$$(F_2(t)f)_i(q) = \frac{1}{4\pi t c_i(q)} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{(r-q, r-q)}{4tc_i(q)}} f(r) dr.$$

Здесь для каждого $t \geq 0$ $\varphi_1(\cdot, t)$ и $\varphi_2(\cdot, t)$ – гладкие функции, определяющие разбиение единицы на положительной полуоси \mathbb{R} .

Теорема. Пусть $\psi : (0, \infty) \rightarrow L_1(Y_n)$ – решение обсуждаемой задачи Коши с начальным условием $f_0 \in L_1(Y_n)$. Тогда для любого $t > 0$ справедлива следующая формула Фейнмана: $\psi(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(t/k)^k f_0$. При этом, каково бы ни было $\alpha > 0$, сходимость последовательности $F(t/k)^k f_0$ равномерна по $t \in [0, \alpha]$.

Отметим, что некоторые близкие задачи рассматривались в статьях, представленных в списке литературы.

Литература

1. A.S. Plyashechnik. Feynman formulas for second-order parabolic equations with parabolic coefficients// Russian Journal of Mathematical Physics. 2013. Vol. 20. No 3.
2. O.G.Smolyanov, D.S.Tolstyga. Feynman formulas for stochastic and Quantum Dynamics of Particles in Multidimensional Domains// Doklady Mathematics. 2013. Vol. 88. No. 2. pp. 541-544

Слова благодарности

Автор глубоко признателен профессору Олегу Георгиевичу Смолянову за постановку задачи и полезные обсуждения.